THE HEAVENS

天界

第1103号（第98巻）
2017年4月号

目次　(Vol.98 No.1103, April 2017)
表紙　本田・ムルコス・パイドゥシャーコヴァー彗星

NPO法人
東亜天文学会
1920年9月25日創立

編集長／山田義弘
スタッフ／金子三典
香西清弘
堀　寿夫
織部隆明
渡辺文健
武井咲予

投稿は、次のメールアドレスへお送りください。
E-mail:oaaeditor@yahoo.co.jp

本　部　〒650-0021 兵庫県神戸市中央区三宮町1丁目1番1号 新神戸ビル4階
E-mail：oaahonbu@yahoo.co.jp

事務局　〒658-0082 兵庫県神戸市東灘区魚崎北町8丁目5番1号 灘高等学校内
E-mail：oaakobe@yahoo.co.jp

郵便振替　00900－1－255587　加入者名：トクヒ）東亜天文学会
ゆうちょ銀行　店名438　普通：1966881　トクヒ）東亜天文学会
三菱東京UFJ銀行 三宮支店 普通：3247066 トクヒ）東亜天文学会
会費(年額)：正会員15,000円、一般会員6,000円、学生会員3,000円、賛助会員一口30,000円

天体力学入門講座（17）

井上　猛　T. Inoue
（滋賀県　湖南市）

三年以上も前の事になるが、入門 (15) で時刻 2013 年 5 月 28 日地球時 0 時に於ける地球の中心から見た木星の位置を推算した。フランス経度局が提供して居る情報を基に軌道要素を算出して計算に供した[1]：

$$
\begin{aligned}
a &= 5.2026\ 22646\ 21\\
e &= 0.048893\ 87012\ 54\\
i &= 1.^\circ 3033\ 32961\ 14\\
\Omega &= 100.^\circ 62\ 73062\ 19\\
\omega &= 273.^\circ 96\ 54083\ 67\\
M &= 66.^\circ 730\ 12909\ 76
\end{aligned}
$$

先ずは、日心黄道座標 $\vec{r}^*$を 計算:

$$
\vec{r}^* = \begin{bmatrix} X = & 0.30383\ 32120\ 25 \\ Y = & 5.1038\ 07755\ 13 \\ Z = & -0.028208\ 63085\ 58 \end{bmatrix}
$$

これから地心赤道座標 $(\Delta; \alpha, \delta)$ を求めた:

赤経 $\alpha = 5$ 時 31 分 08.538 秒

赤緯 $\delta = +23^\circ 00' 19.''8231$

地心距離 $\Delta = 0.6762\,68209$

……………………

続いて入門 (16) では、2014 年 8 月 18 日地球時 0 時に於ける日心黄道位置座標 $\vec{r}^*$ 及び日心黄道速度座標 $\dot{\vec{r}}^*$ を上述のサイトから入手して楕円の軌道要素を算出した[2]。

$$
\vec{r}^* = \begin{bmatrix} X = & -2.9367\,54755\,62 \\ Y = & 4.3817\,93712\,15 \\ Z = & 0.0472\,60509\,30 \end{bmatrix}
$$

$$
\dot{\vec{r}}^* = \begin{bmatrix} \dot{X} = & -0.00636\,60968\,147 \\ \dot{Y} = & -0.00384\,85989\,618 \\ \dot{Z} = & 0.00015\,85021\,346 \end{bmatrix}
$$

これらを用いれば以下の結果を得るのは容易な事である：

$$
\begin{aligned}
a &= 5.2023\,52498\,63\\
e &= 0.04890\,11975\,512\\
i &= 1.^\circ 3032\,50610\,00\\
\Omega &= 100.^\circ 63\,79672\,39\\
\omega &= 273.^\circ 91\,04519\,38\\
M &= 103.^\circ 93\ 56269\ 42
\end{aligned}
$$

近日点通過の時刻 τ の代りに平均近点離角 M を用いて居る。

上記は何(いず)れもが高い精度で計算する事が可能であった。それは木星の運動方程式が高精度で解かれ、それがフランス経度局のサイトに掲載されて居たからである。

木星は、太陽のみの作用の下(もと)で運動して居るのでは無い。土星を初め他の惑星等の影響を受けて運動して居る。複雑な作用の下で運動して居るのであるが運動方程式を立てる事自体は難しい事では無い。残念な事にこれを厳密に解くのは不可能である。勢い近似的な手法に頼らざるを得ない事になる。

近似的ではあるが極めて高い精度で以てこれを行なう事が出来るのである。ここで得られるのは時々刻々の位置と速度である。これらがその瞬間に一つの楕円軌道の上に在ると見做(みな)して六要素を決定するのである。斯(か)かる楕円の軌道要素は時々刻々変化して行く事になる。

2013 年 5 月 28 日と 2014 年 8 月 18 日の要素を比較すると a は 5.20, e は 0.048 , i は $1.^\circ 303$; Ω は $100.^\circ 6$, ω は $273.^\circ 9$ の部分は共通であるがそれ以下の桁は異なって居る。時間に比例して変化する M の値が大きく異なるのは当然の事である。

歴史的には問題の運動方程式を解く際に逐次(ちくじ)近似の方法が採用された。先ず初めに

惑星と太陽の二つの天体の系を考え楕円の軌道要素を決定する。続いては、それらが時間的に変化するとしてその変化を求めて行くのである。微分方程式論の定数変化の方法が適用されるのである。

水星の近日点黄経 ϖ に於ける余剰の前進運動の存在を指摘した Le Verrier の研究も只今の流れに沿って居る。この前進運動の問題は Newton 力学では解く事が不可能でこれの解決には一般相対性理論が不可欠と云うのが現在の常識である。

太陽の質量を m_s 着目惑星のそれを m と表記し $\mu \equiv G(m_S + m)$ なる量を導入する。ここに G は万有引力定数である。太陽及び着目惑星の他に N 個の天体が在るとする。

直交座標系 $O-xyz$ に於ける着目惑星の

位置座標 $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, 速度座標 $\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$

に対する運動方程式を書く：

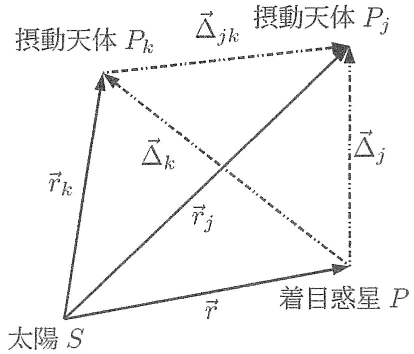
$$\frac{dx}{dt} = V_x - \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_x}$$
$$\frac{dy}{dt} = V_y - \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_y}$$
$$\frac{dz}{dt} = V_z - \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_z}$$
$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{x}{r} + \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial x}$$
$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{y}{r} + \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial y}$$
$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\frac{z}{r} + \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial z}$$

ここに εR^* は**摂動函数**（せつどう）である：

$$\varepsilon R^* = G\sum_{j=1}^{N} m_j \left\{ \frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j + yy_j + zz_j}{{r_j}^3} \right\}$$

一般にこの形の摂動函数 εR^* は速度座標は含まない。然し水星の近日点前進の問題や人工衛星の運動を考える際は速度座標をも含める必要が出て来るのである。

位置ヴェクトル $\vec{r}, \vec{r}_j$ 及び $\vec{\Delta}_j$, $\vec{\Delta}_{jk}$ 等は図に示す通りであるが、太陽 S 着目惑星 P 摂動天体 P_j が同一平面内に在る時に、別の摂動天体 P_k は必ずしも三天体が決定する平面内には無いであろう。



天体 P_j に対しては $\mu_j = G(m_S + m_j)$ として次の形の運動方程式を書いて置く：

$$\ddot{\vec{r}}_j + \frac{\mu_j}{{r_j}^2}\frac{\vec{r}_j}{r_j} = \frac{\partial \varepsilon R_j^*}{\partial \vec{r}_j}, (j = 1, 2, \cdots, N)$$

$$\varepsilon R_j^* = Gm\left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j + yy_j + zz_j}{r^3}\right) +$$
$$+ G\sum_{k=1, k\neq j}^{N} m_k \left(\frac{1}{\Delta_{jk}} - \frac{x_k x_j + y_k y_j + z_k z_j}{{r_k}^3}\right)$$

黄道座標系での量 $\vec{r}^*$ 及び $\dot{\vec{r}}^*$ をここでの $\vec{r}$ 及び $\dot{\vec{r}}$ であると見做せば二体問題の解は次の様に与えられる事になる：

$$\vec{r} = a(\cos u - e)\vec{P} + a\sqrt{1-e^2}\sin u \vec{Q}$$
$$\dot{\vec{r}} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r}\sin u \vec{P} + \frac{\sqrt{\mu p}}{r}\cos u \vec{Q}$$

この表式が変数 $(x, y, z\,; V_x, V_y, V_z)$ から要素 $a, e, i\,; \Omega, \omega, \chi$ と時間 t への変数変換を与える函数関係であるとして**要素変化の式**なるものを構築して行く。この変数変換に依って摂動函数 εR^* は新たなる摂動函数 $\varepsilon R = \varepsilon R(\,a, e, i\,; \Omega, \omega, \chi\,; t\,)$ へと移る事になる。

具体的に要素変化の式を書く

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\chi}$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{\eta^2}{na^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\chi}-\frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\omega}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{\cot i}{na^2\eta}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\omega}-\frac{1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\Omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial i}$$

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\cot i}{na^2\eta}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial i}+\frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial e}$$

$$\frac{d\chi}{dt}=-\frac{\eta^2}{n^2a^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial e}-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial\varepsilon R}{\partial a}\right)$$

上では要素 τ に代って新たな量 χ（カイ）を用いた：

$$M=n(t-\tau)=\int_{t_0}^{t}n\,ds+\chi$$

$$n\equiv\sqrt{\frac{\mu}{a^3}},\quad \eta\equiv\sqrt{1-e^2}$$

要素変化の式の導出に付いては、改めて解説を試みる事にしたい。

誤り訂正

これまでに間違いをして居たにも拘（かかわ）らずその儘にして来て居たものが在る。ここで遅ればせながら訂正して置く事にしたい。

◎ **天界** 2011 年 6 月号 p.212

〔誤〕 $\dot{\rho}^2+\frac{\mu p}{\rho^2}-\frac{2\mu}{\rho}=-\frac{\mu}{2a}$

〔正〕 $\dot{\rho}^2+\frac{\mu p}{\rho^2}-\frac{2\mu}{\rho}=-\frac{\mu}{a}$

◎ **天界** 2013 年 5 月号 p.180

〔誤〕 $r=a(1-e\sin u)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$

〔正〕 $r=a(1-e\cos u)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$

◎ **天界** 2014 年 7 月号 p.265

〔誤〕http://www.imcce.fr/en/epherides/

〔正〕http://www.imcce.fr/en/ephemrides/

現在は当該アドレスは使用されては居ない。情報を入手するには次で検索するのが良い：

Miriade-VO Solar System Portal

....

☆ **天界** 2012 年 6 月号 p.215
2012 年 11月号 p.409

無理数の ρ_j を**正則連分数**に展開した

$$\rho_j(\nu_j)=(0\,;k_j^{(1)};k_j^{(2)};\cdots,k_j^{(\nu_j-1)};\xi_j^{(\nu_j)})$$

ここで $\nu_j;k_j^{(1)};k_j^{(2)};\cdots,k_j^{(\nu_j-1)}$ は総てが正の整数で $\xi_j^{(\nu_j)}$ は 1 より大なる無理数。

上記の形の**正則連分数**に於ては項の数（すう）は**正の整数**でなければならないのである[3)]。無理数 $\xi_j^{(\nu_j)}$ が入るのは許されず次の様に表わされるのである：

$$\rho_j=(0\,;k_j^{(1)};k_j^{(2)};\cdots,k_j^{(\nu_j-1)},\cdots)$$

この時 $\cdots$ の部分には無限個の正の整数が存在して居るとするのである。

我々は $\cdots$ が数を表わすと云う立場には立つ事は出来ないとして来た[4)]。それでは困ると云う事で $\rho_j(\nu_j)$ の形のものを導入し**正準連分数と呼ぶ事**を提言した[5)]。これに依って、任意の無理数 ω を、項の数（かず）が n の**正準連分数**に展開する事も可能になる：

$$\omega(n)=(k^{(0)};k^{(1)};k^{(2)};\cdots,k^{(n-1)},\xi^{(n)})$$

相異なる二つの無理数 ω_1,ω_2 を次の様に**正準連分数**に展開する：

$$\omega_1(n_1)=(k_1^{(0)};k_1^{(1)};k_1^{(2)};\cdots,k_1^{(n_1-1)},\xi_1^{(n_1)})$$

$$\omega_2(n_2)=(k_2^{(0)};k_2^{(1)};k_2^{(2)};\cdots,k_2^{(n_2-1)},\xi_2^{(n_2)})$$

項の数（かず） n_1 と n_2 とは $2\leq n_2-n_1$ なる関係を満たすものとする。

Gauss 記号を用いて $k_1^{(n_1)}\equiv[\xi_1^{(n_1)}]$ 及び $k_2^{(n_2)}\equiv[\xi_2^{(n_2)}]$ で正の整数 $k_1^{(n_1)}$ と $k_2^{(n_2)}$ を

定め、有理数 $r_1(n_1)$ 及び $r_2(n_2)$ を創る：

$$r_1(n_1)=(k_1^{(0)};k_1^{(1)},k_1^{(2)},\cdots,k_1^{(n_1-1)},k_1^{(n_1)})$$

$$r_2(n_2)=(k_2^{(0)};k_2^{(1)},k_2^{(2)},\cdots,k_2^{(n_2-1)},k_2^{(n_2)})$$

これらは、何れもが**正則連分数**であり $r_1(n_1)\neq r_2(n_2)$ である。

上を要約するならば一つの**正準連分数**が与えられたならば必ず一つの**正則連分数**が対応すると云う事なのである。換言すれば無理数と有理数の間に一対一の対応関係が存在して居ると云う事である。

現代数学が斯かる立場に立っては居ないと云うのは周知の事である。

参考文献

1）井上 猛 天体力学入門講座 (15)
天界 2013 年 5 月号 pp.178-182

2）井上 猛 天体力学入門講座 (16)
天界 2014 年 7 月号 pp.262-266

3）日本数学会 **岩波数学辞典** 第 2 版
岩波書店 1970 年 p.531

4）井上 猛「天界に掲載される」と云うこと
天界 2008 年 9 月号 p.466

5）井上 猛 **数学教育三つの大罪**
文芸社 2016 年 p.59

新天体発見ニュース

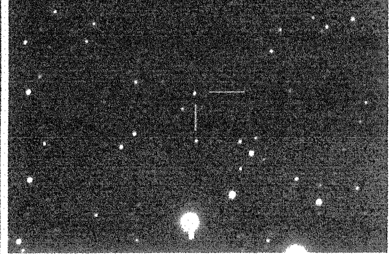
西村栄男さん、さそり座に新星を発見!!

■さそり座の新星（V1657 Sco）

静岡県掛川市の西村栄男さんは、2017 年 2 月 1.862 日 UT、同市五明の茶畑にキヤノン 200mm F3.2 望遠レンズと EOS 5D カメラを設置して、さそり座を撮影した画像から 11.7 等の新星を発見しました。新星の位置は、赤経：16 時 52 分 18.63 秒、赤緯：-37 度 54 分 18.4 秒（2000.0 年分点）です。西村さんから「増光天体の位置から数秒以内のところに赤い星があり、その星が新星爆発したのであれば増光幅が小さすぎ報告しようか迷いました。数人の方に相談したり、自分でも過去画像を 2 年間調べ過去の増光が見られないので勇気を出して報告しました。2 月 12.3 日 UT にチリのセロ・トロロ天文台で口径 4.5 m の望遠鏡を向けていただき新星と確認されたのは本当にラッキーだったと思います」とメールが届きました。確認画像は、金子静夫さん（9cm F4.6 屈折望遠鏡、12.2 等／オーストラリア Siding Spring の iTelescope T13 を日本から遠隔操作）、野口敏秀さん（23cm F6.3 シュミカセ望遠鏡、12.6 等／千葉県）から送られてきました。

発見画像 2017年2月1.862日UT
（撮影：西村栄男さん）

確認画像 2017年2月6.669日UT
（撮影：金子静夫さん）



確認画像 2017年2月10.835日UT
（撮影：野口敏秀さん）