水星近日点黄経に於ける余剰永年変化問題への最終解答
Final Answer to the Problem of the Excess Secular Variation in the Longitude of the Perihelion of Mercury

井上　猛　（京都産業大学）
T. Inoue
Kyoto Sangyo　University

Abstract. Since 1991, we continuously examine the problem of the excess secular variation in the longitude of the perihelion of Mercury. The existence of this peculiar motion was pointed out for the first time by Le Verrier in 1859. Then Newcomb afirmed this phenomenon in 1895. This amount is about 43 arc seconds per century. We know well "the widely accepted fact" that this problem has been totally solved by the Einstein's general theory of relativity in 1915.

Our constant examination for this problem made able us to reveal the truth. That is to say, there existed "a tiny mistake" in the theories of the motion of Mercury established by Le Verrier and Newcomb.

This is "the very reason" why such an excess advance appears in the motion of Mercury. Our result shows that the Newtonian Mechanics is perfect at least to describe the motion of this planet.

１．「惑星運動の理論」は、太陽と着目惑星とから成る「二体問題の系」を先ずは積分しそこでの積分定数を新変数として書かれた「要素変化の式」を通して、総ての天体に依る作用を取り込む形で構成されて居る。運動理論の中に現われる数値は、観測を通して定められるべき性質のものである。然し、現実には総ての天体の影響を内包した状況下でしかこれらを決定する事は出来ない。それでは「二体問題の系」と云うのは謂わば絵に描いた餅でしか無いのであろうか？　そんな事は無い！　観測的に決定された数値の中に“紛れ込んで居る摂動の部分”は、理論の助けを借りて、排除して行けば良い事になって居る。最初に「水星の近日点黄経ϖに、“余剰の”永年変化が存在する」と云う事を言い出したLe Verrierの場合とても、状況は全く同じであった。

水星の運動が一平面内に限って行なわれるとしても、問題の本質を見失う事は無いので平面極座標（r, ϕ）を導入する。rは動径を、ϕは黄経を表わす。我々も、Le Verrierに倣って、離心率eの二次以上の微小量は無視して、楕円軌道を次の形に書く。

(1)　　：$\phi = \varpi + M + 2e \sin M$

(2)　　：$r = a(1 - e \cos u)$

此処で、ϖは近日点黄経、Mは平均近点離角、aは長半径、uは離心近点離角を表わす。

2. 水星の黄経ϕおよび動径rを与える運動理論は、極めて複雑な三角函数の組合せから成って居る。更に、これに多数の数表を併用して行かなければならない様になって居る。

然し、我々が問題とする対象は意外と“単純”であって、Le Verrierが与えたものから引用しても以下の様である。

(3)　$\phi_{観測} = \varpi + M + 2e_{楕円} \sin M + S \sin M$

(4)　$r_{観測} = a(1 - e_{楕円} \cos u) + C_{金星} \cos M$

(5)　$S \equiv S_{金星} + (S_{地球} + S_{木星})$

此処に、量Sや$C_{金星}$などは、Le Verrierに依って、次の様に与えられて居るものである。

惑　星	黄経の摂動　$\delta\phi$ sin M の係数	動径の摂動　δr cos M の係数
金　星	$S_{金星}$: +0.″065 2528	$C_{金星}$: -0.″011 4015
地　球	$S_{地球}$: +0.″017 7139	* * *
木　星	$S_{木星}$: +0.″032 0147	* * *
総　和	S : +0.″114 9815	$C_{金星}$: -0.″011 4015

本小論で扱って居る精度からすれば、上の関係式は、次の形に書き表わす事も出来る。

(6)　$\phi_{観測} = \varpi + M + 2e_{観測} \sin M$

(7)　$r_{観測} = a(1 - e_{動径} \cos u)$

但し、次の関係を仮定した。

(8)　$e_{観測} \equiv e_{楕円} + \dfrac{S}{2}$

(9)　$e_{動径} \equiv e_{楕円} - \dfrac{C_{金星}}{a}$

観測的に離心率の値を決定するには、「中心差」の表式に着目するのが良いであろう。上記の(6)式が、将に此の表式に外ならないので、これに依って量$e_{観測}$の値を、観測的に決定する事が出来る。量Sは、理論の方から知る事が出来るので、(8)式に依って直ちに楕円軌道の離心率$e_{楕円}$の値を知る事が出来る。

処が、惑星運動理論の大御所たる Le Verrier も Newcombも此の手順を踏んでは居ないのである。何故か？　それは、深い考えが有っての事なのであろうが、実際問題としては量Sの推定が、意外に困難なものなのかも知れない。何はともあれ「彼らが、どんな風に運動理論を構築して行ったか」は、我々にも充分に窺い知る事が出来るのである。それが可能であったればこそ、彼らが建設した理論の中の誤りも発見する事が出来たのである。「彼ら」と一括りにして言ったが、Le Verrierの理論の建設の仕方と Newcombのそれとの間には明確な違いが存して居るのである。

3. Le Verrierが、どの様に扱ったかを見て行く事にしよう。「中心差」の表式に着目し観測から“離心率$e_{観測}$”の値を入手する。その数値から、地球と木星に依る摂動分を差し引いて、次式で与えられる“離心率$\tilde{e}$”を定める。

$$(10)\qquad \tilde{e} \equiv e_{観測} - \frac{1}{2}(S_{地球} + S_{木星})$$

只今の量$\tilde{e}$には、未だ金星に依る影響が含まれて居る。金星の影響を除去するのに、彼は「二通り」に修正を施して、二個の“離心率”を設定して行くのである。

$$(11)\qquad e_L \equiv \tilde{e} - \frac{S_{金星}}{2}$$

$$(12)\qquad e_r \equiv \tilde{e} + \frac{C_{金星}}{a}$$

具体的な数値を与えてみる。

$$(13)\qquad -\frac{S_{金星}}{2} = -0.''032\ 626$$

$$(14)\qquad +\frac{C_{金星}}{a} = -0.''029\ 453$$

両者の差は僅少である。

$$(15)\qquad +\frac{C_{金星}}{a} - \left\{-\frac{S_{金星}}{2}\right\} = +0.''003\ 173$$

Le Verrierは、「二体問題」の解を、「中心差」及び「動径」に対し、平均近点離角に関する Fourier級数に展開する。その時に、「中心差」の展開には“離心率e_L” を用い「動径」の展開には“離心率e_r” を用いるのである。「差が小さいから、構わない」と見做したのであろう。その解表式に金星に依る摂動を加味して行くのである。その様子を「中心差」及び「動径」で見てみるならば以下の如しである。

$$(16)\qquad \phi_L = \varpi + M + 2e_L \sin M + S_{金星} \sin M$$

$$(17)\qquad r_L = a_L(1 - e_r \cos u) + C_{金星} \cos M$$

これは、何の事は無い、単に一つの楕円軌道を計算したに過ぎない事になって居る。動径r_Lの表式では、長半径を a_Lと表記して置いた。

$$(18)\qquad \phi_L = \varpi + M + 2\tilde{e} \sin M$$

$$(19)\qquad r_L = a_L(1 - \tilde{e} \cos u)$$

彼は、更に $S_{地球}$ 及び $S_{木星}$ に依る影響を、黄経ϕ_L の表式に追加して行くのである。

次には、 Newcombの扱いに付いて見て行く。彼は、観測される黄経$\phi_{観測}$を、楕円軌道で以て表現すべく、次の様な扱いをした。

$$(20)\qquad e_N \equiv e_L + \frac{S}{2}\ ,\quad S = S_{金星} + (S_{地球} + S_{木星})\quad ;\quad (e_N = e_{観測})$$

これに依る時は、黄経ϕの方は、関与する惑星の摂動を総て取り込んで居るのであるから問題は全く無い。然し、此の離心率 e_Nを、動径rの計算にも用いて居るのである。

Newcombが、黄経ϕおよび動径rを計算する為に用いた表式を書き出して置く。

(21) $$\phi_N = \varpi + M + 2e_N \sin M$$

(22) $$r_N = a_N(1 - e_N \cos u)$$

此処で用いた長半径 a_Nは、Le Verrierの a_Lと、次の関係を有する。

(23) $$a_N\left(1 + \frac{1}{2}e_N{}^2\right) = a_L\left(1 + \frac{1}{2}e_L{}^2\right)$$

これは、Le Verrierが、水星の質量を太陽の質量の三百万分の一である、と仮定したのに対して、Newcombは、六百万分の一であると仮定した事に起因するものである。

Le Verrierの理論構成の仕方と Newcombのそれとの間には “明確な差異が存在” して居るのであるが、「要するに一つの楕円軌道を計算したに過ぎない」と云う点では、両人とも同じであると言っても良い。 Le VerrierもNewcombも共に二体問題の系を「人工系」に選び、Kepler要素に対する摂動計算を行なって、「余剰の前進量の存在する事」を主張したのであった。

4. 我々は、(15)式に与えられて居る、金星の影響に於ける “差” は確かに僅少であるがLe Verrierの理論の精度からすれば「これを無視する事は許されない」とし、此の差異に着目して『中間軌道』の導入を図ったのであった。これに依って(3)式(4)式が表わして居る真の黄経ϕおよび動径rが所与の精度で表現され得るからである。更に、此の『中間軌道』を用いるならば、「要素変化の方法」に依る摂動計算が精密かつ容易に実行可能となるからである。

(24) $$u - e \sin u = M \ , \quad M = \int_{t_0}^{t} n\,dt + \chi$$

(25) $$n \equiv \sqrt{\{\mu_N / a_N{}^3\}} \ , \quad \mu_N = G(m_{太陽} + m_{水星})$$

(26) $$\tan(f/2) = \sqrt{\{(1+e^*)/(1-e^*)\}} \cdot \tan(u/2)$$

(27) $$e^* \equiv e + \Delta E \ , \quad \Delta E \equiv S_{地球} + S_{木星}$$

(28) $$r = a_N\{1 - (e - \Delta e) \cos u\}$$

(29) $$\phi = \varpi + f$$

(30) $$p_r = n\,a_N(e - \Delta e) \sin u / (1 - e \cos u)$$

(31) $$p_\phi = n\,r^2 \sin f / \{\sin u(1 - e \cos u)\}$$

(32) $$\Delta e \equiv \frac{C_{金星}}{a} + \frac{S_{金星}}{2}$$

上では、単にeと表記したが、これは (10)式で与えられて居る $\tilde{e}$の事である。

水星の運動を“正しく表現して居る”我々の『中間軌道』が、二体問題の系と如何なる関係にあるかは明らかにされなければならない重要事項である。そこで、二体問題の系を「人工系」に選び、積分定数たる楕円要素に対して「変化の式」を解いて行ってみる。

此の立場に立つ時は、次の εR_Nが、Kepler要素に対する「摂動函数」となる。

$$(33)\qquad \varepsilon R_N = \mu_N \frac{\Delta e}{e}\left\{ \frac{1}{a_N} - \frac{3}{r} + \frac{a_N}{r^2} + \frac{a_N^2(1-e^2)}{r^3} \right\} + $$
$$+ \mu_N \frac{\Delta E}{e}\left\{ - \frac{a_N}{r^2} + \frac{a_N^2(1-e^2)}{r^3} \right\}$$

特に知りたいのは、近日点黄経 ϖ に於ける永年変化 $\delta\varpi_{(s)}$ である。そこで、摂動函数 εR_N の永年部 $\varepsilon R_{N(s)}$ を抽出して調べてみる事にしよう。

$$(34)\qquad \varepsilon R_{N(s)} = \mu_N \frac{\Delta e}{e}\left\{ - \frac{2}{a_N} + \frac{2}{a_N \eta} \right\} + \mu_N \frac{\Delta E}{e} \times 0$$

$$(35)\qquad \delta\varpi_{(s)} = \frac{\Delta e}{e} \cdot \frac{2}{1+\eta} \cdot \left\{ \frac{1}{\eta} + \frac{e^2}{\eta^2} \right\} \cdot n(t - t_0)$$

(36) $\boxed{\delta\varpi_{(s)} : +43.374\ 8296\text{秒角/世紀}}$

これで見れば、「正しい軌道」は、静止した楕円軌道に対して近日点黄経 ϖ に上記の一世紀当り43秒角の前進を有するが如きものであると云う事が明らかになった。

Le Verrierも Newcombも、我々の『中間軌道』に於ける微小量 Δeの存在を、無視して居るのである。これでは、43秒角/世紀 の不足分が出たとしても不思議は無い訳である。

惑星摂動を「正しく」考慮しさえすれば、“世紀の難問 ：43秒角/世紀 の不足”なるものも雲散霧消して仕舞うのは「火を見るよりも明らか」である。これを以て、一先ずは当該問題に終止符を打つ事としたい。

本小論では参考文献を逐一挙げる事をしなかった。それは、既に第24回天体力学研究会集録から第34回天体力学研究会集録に至る間の、我々の主張を繰り返しつつ整理したのが本報告であるとの認識に立ったからである。然し、此の儘では拠り所の無いものになって仕舞うので、一つだけ挙げて置く事にする。

井上猛 ： 2000 第32回天体力学研究会集録 p.147 ~ p.158
水星近日点前進の問題 Newcombの場合

(03511D)

２００６年３月２０日（月）に、内容の整理を行なった。