Kepler要素に対するPoisson括弧の直接計算法
Direct Calculation Method of the Poisson Parentheses for the Keplerian Elements

井上　猛　（京都産業大学）
T. Inoue
Kyoto Sangyo University

Abstract. The equations for the variation of arbitrary constants are expressed with the aid of the Poisson parentheses. Various methods widely used to obtain these equations inevitably contain the tedious calculations of the superfluous Lagrange brackets.

Here, we present a method which enables us to obtain the equations of the variation for the Keplerian elements without any aid of the Lagrange brackets, that is to say, one is directly capable to calculate the Poisson parentheses, also in the case of arbitrary intermediary orbits.

We introduced the rectangular unit vectors $\vec{\mathbf{P}}^*$, $\vec{\mathbf{Q}}^*$ and $\vec{\mathbf{R}}$ with which the radius vector $\vec{r}$ and the velocity vector $\vec{V}$ are expressed as follows :

(43) $\vec{r} = r \cdot \vec{\mathbf{P}}^*$ and (44) $\vec{V} = \sqrt{\left\{\frac{\mu}{p}\right\}} \cdot \left\{ e \sin f \cdot \vec{\mathbf{P}}^* + \xi \cdot \vec{\mathbf{Q}}^* \right\}$

The desired partial derivatives of the Keplerian elements with respect to the radius vector and the velocity vector are straightforwardly obtained as :

(48) $\frac{\partial a}{\partial \vec{r}} = \frac{2\xi^2}{\eta^4} \vec{\mathbf{P}}^*$ and (49) $\frac{\partial a}{\partial \vec{V}} = \frac{2e \sin f}{n\eta} \vec{\mathbf{P}}^* + \frac{2\xi}{n\eta} \vec{\mathbf{Q}}^*$

$$(63)\qquad \frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}} = \frac{\xi \sin f}{pe} \vec{\mathbf{P}}^* + \frac{(-\xi + \eta^2)}{pe^2} \vec{\mathbf{Q}}^* + \\ + \frac{\cos i}{p \sin i} (\cos \psi + e \cos \omega) \vec{\mathbf{R}}$$

$$(66)\qquad \frac{\partial M}{\partial \vec{V}} = \frac{\eta^2(\xi^2 - \xi - 2e^2)}{nae^2\xi} \vec{\mathbf{P}}^* - \frac{\eta^2(\xi+1)\sin f}{nae\xi} \vec{\mathbf{Q}}^*$$

These are four examples among twelve partial derivatives.

The Poisson parentheses should be calculated through the scalar product of these derivatives. The Poisson parenthesis(a, e) will be given as an example.

$$(67)\qquad (a, e) = \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial e}{\partial \vec{V}}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{V}} \cdot \frac{\partial e}{\partial \vec{r}}\right) = \\ = \frac{2\xi \sin f}{na\eta^3}\{\xi - \xi + \eta^2 - \eta^2\} = 0$$

It is profoundly desirable to construct the equations of the variation of the arbitrary constants through the present maneuver.

１．「要素変化の式」の導出に際して、通常の方法では、Lagrange括弧の計算は不可欠である。最終的な表式は、総てが Poisson括弧で表わされるのであるから、仲介役としてのLagrange括弧の計算を必要としない方法が在るならば、それは「優れたもの」と言うべきである。此の事を念頭に置きつつ工夫を凝らした結果、 Poisson括弧を直接的に計算する方法を確立する事が出来たのである。二体問題の系を「人工系」に選んだ際の“新変数”即ち、Kepler要素に対して、具体的な導出の方法を提示する。此の様な事が可能となったのも、「定数変化の方法」に関して、充分に理解を深める事が出来て居たからである。
☆　井上猛：『定数変化法と云うもの』　第27回天体力学研究会集録　p. 155, 1995

先ずは、我々が用いる「Kepler要素の表記」を示す目的で、二体問題の解表式を以下に挙げて置く。

(1) $$u - e \sin u = M = n(t - \tau) = \int_{t_0}^{t} n\,dt + \chi$$

(2) $$n \equiv \sqrt{\{\mu / a^3\}}$$

(3) $$\mu \equiv G(m_{太陽} + m_{惑星})$$

(4) $$\tan(f/2) = \sqrt{\{(1+e)/(1-e)\}}\ \tan(u/2)$$

(5) $$\psi \equiv \omega + f$$

(6) $$r = a(1 - e\cos u)$$

(7) $$\phi = \Omega + \tan^{-1}(\cos i\ \tan\psi)$$

(8) $$\theta = \sin^{-1}(\sin i\ \sin\psi)$$

此処に、Kepler要素 ： a、e、i ； Ω、ω、τは、それぞれが次の意味を有するとした：

a ：軌道長半径　　e ：離心率　　i ：軌道傾斜角

Ω ：昇交点黄経　　ω ：近日点引数　　τ：近日点通過の時刻

以下に於ては、直交座標系に準拠した「位置」と「速度」の利用が、計算に取って甚だ好都合なので、次の形の表式を掲げて置く事にする。

(9) $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a(\cos u - e)\cdot\vec{P} + a\eta\sin u\cdot\vec{Q}$$

(10) $$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{\{\mu a\}}}{r}\sin u\cdot\vec{P} + \frac{\sqrt{\{\mu a\}}\,\eta}{r}\cos u\cdot\vec{Q}$$

(11) $$\eta \equiv \sqrt{\{1 - e^2\}}$$

量 $\vec{P}$ および $\vec{Q}$ は、$\vec{R}$と共に、軌道のヴェクトル定数と呼ばれて居る互いに直交する単位ヴェクトルを表わす。

(12) $$\vec{P} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{pmatrix}$$

(13) $$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ \cos\omega\sin i \end{pmatrix}$$

(14) $$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\Omega\sin i \\ -\cos\Omega\sin i \\ \cos i \end{pmatrix}$$

2．通常の方法に於ては、直ちに上記の式群を計算して行くのであるが、我々の方法ではこれらを要素に付いて解いた次の形のものを用意してから、計算に取り掛かるのである。

(15) $$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu}\right)^{-1}$$

(16) $$e\sin u = \frac{(\vec{r}\cdot\vec{V})}{\sqrt{\{\mu a\}}}$$

(17) $$e\cos u = 1 - \frac{r}{a}$$

(18) $$M = u - e\sin u$$

(19) $$\cos i = \frac{xV_y - yV_x}{\sqrt{\{\mu a\}}\,\eta}$$

(20) $$\sin\Omega\sin i = +\frac{yV_z - zV_y}{\sqrt{\{\mu a\}}\,\eta}$$

(21) $$\cos\Omega\sin i = -\frac{zV_x - xV_z}{\sqrt{\{\mu a\}}\,\eta}$$

(22) $$\sin\omega\sin i = \frac{z}{r}\cos u - \sqrt{\left\{\frac{a}{\mu}\right\}}\,V_z\sin u$$

(23) $$\cos\omega\sin i = \frac{z}{r}\frac{\sin u}{\eta} + \sqrt{\left\{\frac{a}{\mu}\right\}}\,V_z\frac{\cos u - e}{\eta}$$

(24) $$r = \sqrt{\{\vec{r}\cdot\vec{r}\}} = a(1 - e\cos u)$$

(25) $$V^2 = \{\vec{V}\cdot\vec{V}\} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

実は、ヴェクトル $\vec{P}$及び$\vec{Q}$ の中の角度ωの所を、これに真近点離角 f を加えた量ψに置き換えたもので考える方が好都合なのである。量ψは、(5)式で定義して置いた。

(26) $$\vec{P}^* \equiv \begin{pmatrix} +\cos\Omega\cos\psi - \sin\Omega\sin\psi\cos i \\ +\sin\Omega\cos\psi + \cos\Omega\sin\psi\cos i \\ \sin\psi\sin i \end{pmatrix}$$

(27) $$\vec{Q}^* \equiv \begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin\psi - \sin\Omega\cos\psi\cos i \\ -\sin\Omega\sin\psi + \cos\Omega\cos\psi\cos i \\ \cos\psi\sin i \end{pmatrix}$$

ヴェクトル $\vec{R}$ は、(14)式で与えられるものを、その儘の形で用いる。

3．要素変化の式そのものは、既に良く知られて居るものである。此処で問題にしようとして居るのは 「Poisson括弧のみに依拠」した形で、その導出が可能なものなのか否かを知る事である。そこで、問題とする要素変化の式を、先ずは書いて置く事にする。

$$\dot{\zeta}_h = -\sum_{k=1}^{6}(\zeta_h, \zeta_k)\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k} \quad , \qquad (h = 1, 2, \cdots, 6) \tag{28}$$

此処では、要素に次の対比を課して、表記の簡便化を図った。

$$\begin{array}{cccccc} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 & \zeta_6 \\ a & e & i & \Omega & \omega & \tau \end{array} \tag{29}$$

量εRは、摂動函数を表わす。

$$\varepsilon R = \varepsilon R(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3; \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6; t) \tag{30}$$

量（ζ_h, ζ_k）は、 Poisson括弧を表わす。具体的な内容は、次式で与えられる。

$$(\zeta_h, \zeta_k) = \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial x}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_x} - \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_x}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial x} + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial y}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_y} - \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_y}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial y} + \\ + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial z}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_z} - \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_z}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial z} \quad , \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, 6) \tag{31}$$

此処で、 $\mathbb{Z}_h$ と表記したものは、要素 ζ_hを、位置ヴェクトル$\vec{r}$、速度ヴェクトル$\vec{V}$及び時間 t に付いて解いた時の函数を表わす。

$$\zeta_h = \mathbb{Z}_h(x, y, z; V_x, V_y, V_z; t) \quad , \qquad (h = 1, 2, \cdots, 6) \tag{32}$$

処で、此の函数 $\mathbb{Z}_h$は、どの様にして定められたのであろう？ 実は、話の順序が逆になって居たのである。二体問題の解表式(1)～(14)を、表式中に含まれて居る積分定数に付いて解いた式群(15)～(23)が、外ならぬ当該函数 $\mathbb{Z}_h$を定めるのである。従って、積分定数たるKepler要素 : $a, e, i; \Omega, \omega, \tau$ に対して、次の関係式が先ず初めに書かれるべきであったのである。

$$c_h = \mathbb{Z}_h(x, y, z; V_x, V_y, V_z; t) \quad , \qquad (h = 1, 2, \cdots, 6) \tag{33}$$

此処で、 c_h と表記したものは、未だ定数で有る事を強調した処のKepler要素を表わす。対比は、以下の如くである。

$$\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ a & e & i & \Omega & \omega & \tau \end{array} \tag{34}$$

本来なら、(33)式に於ける位置ヴェクトルおよび速度ヴェクトルの文字表記は、(32)式のそれとは、異なるもので書き表わされなければならないのであるが、煩瑣を避ける目的で同一文字で済ませた。何はともあれ、函数 $\mathbb{Z}_h$は、(33)式に依って与えられるのである。従って、此の函数が、次の関係式を満たすのは明らかな事である。

$$\dot{c}_h = \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_x}\dot{V}_x + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_y}\dot{V}_y + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_z}\dot{V}_z + \\ + \frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial t} \equiv 0 \quad , \qquad (h = 1, 2, \cdots, 6) \tag{35}$$

摂動が存在して居る場合には、只今の積分定数 c_hを、新変数 ζ_hに置き換えると共に位置ヴェクトルおよび速度ヴェクトルが満たす、運動方程式を考慮するのであった。

4．与えられた運動方程式が、次の形のものであるとする。

$$\dot{x}=V_x-\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_x},\quad \dot{y}=V_y-\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_y},\quad \dot{z}=V_z-\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_z}\quad; \tag{36}$$

$$\dot{V}_x=-\frac{\mu}{r^3}x+\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial x},\quad \dot{V}_y=-\frac{\mu}{r^3}y+\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial y},\quad \dot{V}_z=-\frac{\mu}{r^3}z+\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial z} \tag{37}$$

此処で、量 εR^* は、位置ヴェクトルおよび速度ヴェクトルを引数とした時の摂動函数を表わして居る。

$$\varepsilon R^*=\varepsilon R^*(x,y,z;V_x,V_y,V_z;t) \tag{38}$$

二体問題の系を「人工系」としたのであるから、(32)式で与えられる要素 ζ_h に対する時間的な変化は以下の様になる。

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_h &=\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_x}\dot{V}_x+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_y}\dot{V}_y+\frac{\partial \mathbb{Z}}{\partial V_z}\dot{V}_z+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial t}=\\
&=\Big\{\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial x}V_x+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial y}V_y+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial z}V_z+\\
&\quad+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_x}\Big(-\frac{\mu}{r^3}x\Big)+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_y}\Big(-\frac{\mu}{r^3}y\Big)+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_z}\Big(-\frac{\mu}{r^3}z\Big)+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial t}\Big\}+\\
&\quad-\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_x}-\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_y}-\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_z}+\\
&\quad+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_x}\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial x}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_y}\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial y}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_z}\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial z}\end{aligned} \tag{39}$$

上で、中括弧 $\{\cdots\}$ の中の量は、函数 $\mathbb{Z}_h$ の定め方から(35)式の適用を受け、零となる。摂動函数 εR^* と εR の偏微分係数の間には、次の関係が存在して居る。

$$\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_x}=\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_x},\quad \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_y}=\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_y},\quad \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial V_z}=\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_z}\ ; \tag{40}$$

$$\frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial x}=\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial x},\quad \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial y}=\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial y},\quad \frac{\partial \varepsilon R^*}{\partial z}=\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial z} \tag{41}$$

只今の関係を、(39)式に考慮すれば、以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_h &=-\sum_{k=1}^{6}\Big(\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial x}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_x}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial y}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_y}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial z}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial V_z}\Big)\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}+\\
&\quad+\sum_{k=1}^{6}\Big(\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_x}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial x}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_y}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial y}+\frac{\partial \mathbb{Z}_h}{\partial V_z}\frac{\partial \mathbb{Z}_k}{\partial z}\Big)\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}=\\
&=-\sum_{k=1}^{6}(\zeta_h,\zeta_k)\frac{\partial \varepsilon R}{\partial \zeta_k}\quad,\qquad (h=1,2,\cdots,6)\end{aligned} \tag{42}$$

斯くして、(28)式に与えて置いた要素変化の式を何の曖昧さも無く導き出す事が出来た。此の表式自体は、既に良く知られたものであって、何ら新しいものでは無い。肝心なのは此処に登場して来る偏微分係数を、直接的に計算する方法を提示する事である。

5. 先に、(26)式および(27)式で、軌道のヴェクトル定数に準ずる、軌道面内に位置する単位ヴェクトル $\vec{P}^*$および $\vec{Q}^*$を定義して置いた。これを用いる時は、位置ヴェクトルや速度ヴェクトルが、次の形に書き表わされる事になる。

(43) $\vec{r}=r\cdot\vec{P}^*$

(44) $\vec{V}=\sqrt{\left\{\frac{\mu}{p}\right\}}\cdot\left\{e\ \sin\ f\cdot\vec{P}^*+\xi\cdot\vec{Q}^*\right\}$

(45) $p\equiv a(1-e^2)$

(46) $\xi\equiv\frac{p}{r}=1+e\ \cos\ f$

以上の準備が整いさえすれば、後は、平易かつ機械的な計算を進めて行くのみである。我々の様に直角座標を用いた場合は、一つの成分に対する偏微分係数を計算すれば、残る成分に対しても、同型の結果が得られる様になって居る事が多いのである。

一例として、長半径aの偏微分係数の計算要領を、エネルギー積分に着目して示す。

(47) $-\frac{\mu}{2a}=\frac{1}{2}V^2-\frac{\mu}{r}$

$$\frac{\mu}{2a^2}\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\mu}{r^2}\frac{x}{r}\ ,\qquad \frac{\partial a}{\partial x}=2\frac{a^2}{r^2}\frac{x}{r}=\frac{2\xi^2}{\eta^4}P_x^*$$

(48) $\frac{\partial a}{\partial\vec{r}}=\frac{2\xi^2}{\eta^4}\vec{P}^*$

$$\frac{\mu}{2a^2}\frac{\partial a}{\partial V_x}=V_x\ ,\qquad \frac{\partial a}{\partial V_x}=\frac{2a^2}{\mu}\sqrt{\left\{\frac{\mu}{p}\right\}}\left\{e\ \sin\ f\cdot P_x^*+\xi\cdot Q_x^*\right\}$$

(49) $\frac{\partial a}{\partial\vec{V}}=\frac{2e\ \sin\ f}{n\eta}\vec{P}^*+\frac{2\xi}{n\eta}\vec{Q}^*$

次には e sin uおよび e cos uを、$\vec{r}$および$\vec{V}$に付いて偏微分して行く。此処にはuの偏微分係数のみを書いて置く事にする。

(50) $e\frac{\partial u}{\partial\vec{r}}=-\frac{\xi\ e\ \sin\ f}{pe\eta}\vec{P}^*+\frac{\eta^2(\xi-\eta^2)}{pe\eta}\vec{Q}^*$

(51) $e\frac{\partial u}{\partial\vec{V}}=\frac{\xi(\xi+\eta^2-2)}{nae\xi}\vec{P}^*-\frac{(\xi+\eta^2)\ e\ \sin\ f}{nae\xi}\vec{Q}^*$

残る要素の計算に必要となる、補助量に対する偏微分係数の結果を列挙して置こう。

(52) $\frac{\partial p}{\partial\vec{r}}=2\vec{P}^*+2e\vec{P}\ ,\qquad \frac{\partial p}{\partial\vec{V}}=\frac{2\eta^3}{n\xi}\vec{Q}^*$

(53) $\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}=-\frac{\xi\ e\ \sin\ f}{pe^2}\vec{P}^*+\frac{\{(2-\eta^2)\xi-\eta^2\}}{pe^2}\vec{Q}^*$

(54) $\frac{\partial f}{\partial\vec{V}}=\frac{\eta\xi(\xi-1)}{nae^2\xi}\vec{P}^*-\frac{\eta(\xi+1)e\ \sin\ f}{nae^2\xi}\vec{Q}^*$

6. 本小論では、要素τの代りに平均近点離角Mを用いる事にした。此の事は、本質的な困難を惹起したりをしないばかりか、寧ろ、見通しの良い結果を与えて呉れるのである。

何はともあれ、計算結果を一括列挙してみるならば、以下の様になる。

(55)
$$\frac{\partial a}{\partial \vec{r}} = \frac{2\xi^2}{\eta^4}\vec{P}^*$$

(56)
$$\frac{\partial a}{\partial \vec{V}} = \frac{2e \sin f}{n\eta}\vec{P}^* + \frac{2\xi}{n\eta}\vec{Q}^*$$

(57)
$$\frac{\partial e}{\partial \vec{r}} = -\frac{\xi(\xi-\eta^2)}{pe}\vec{P}^* + \frac{\sin f}{a}\vec{Q}^*$$

(58)
$$\frac{\partial e}{\partial \vec{V}} = \frac{\eta \sin f}{na}\vec{P}^* + \frac{\eta(\xi^2-\eta^2)}{nae\xi}\vec{Q}^*$$

(59)
$$\frac{\partial i}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{p}(\sin\psi + e\sin\omega)\vec{R}$$

(60)
$$\frac{\partial i}{\partial \vec{V}} = \frac{\cos\psi}{na\xi}\vec{R}$$

(61)
$$\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{r}} = -\frac{1}{p\sin i}(\cos\psi + e\cos\omega)\vec{R}$$

(62)
$$\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{V}} = \frac{\eta\sin\psi}{na\sin i\,\xi}\vec{R}$$

(63)
$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}} = \frac{\xi\sin f}{pe}\vec{P}^* + \frac{(-\xi+\eta^2)}{pe^2}\vec{Q}^* + \\ + \frac{\cos i}{p\sin i}(\cos\psi + e\cos\omega)\vec{R}$$

(64)
$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{V}} = \frac{\eta(-\xi+1)}{nae^2}\vec{P}^* + \frac{\eta(\xi+1)\sin f}{nae\xi}\vec{Q}^* + \\ - \frac{\eta\cos i\sin\psi}{na\xi\sin i}\vec{R}$$

(65)
$$\frac{\partial M}{\partial \vec{r}} = -\frac{(\xi+e^2)\sin f}{ae\eta}\vec{P}^* + \frac{\eta(\xi-1)}{ae^2}\vec{Q}^*$$

(66)
$$\frac{\partial M}{\partial \vec{V}} = \frac{\eta^2(\xi^2-\xi-2e^2)}{nae^2\xi}\vec{P}^* - \frac{\eta^2(\xi+1)\sin f}{nae\xi}\vec{Q}^*$$

これが総てである。量 $\vec{P}^*$、$\vec{Q}^*$、$\vec{R}$ が、互いに直交する単位ヴェクトルである事の故にPoisson括弧の計算は、極めて容易なものとなるのである。

此の様な「優れたもの」が、これ迄に提案されなかったと云うのは、甚だ不可解な事と言うべきであろう。

7．最早、説明の必要は無い処であるが、一例として括弧（a，e）を計算して置く。

$$(67)\qquad (a,e) = \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\partial e}{\partial \vec{V}}\right) - \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{V}}\cdot\frac{\partial e}{\partial \vec{r}}\right) =$$

$$= \left(\frac{2\xi^2}{\eta^4}\vec{P}^*\cdot\frac{\eta\sin f}{na}\vec{P}^* + \frac{\eta(\xi^2-\eta^2)}{nae\xi}\vec{Q}^*\right) +$$

$$-\left(\frac{2e\sin f}{n\eta}\vec{P}^* + \frac{2\xi}{n\eta}\vec{Q}^*\cdot\frac{\xi(\xi-\eta^2)}{pe}\vec{P}^* + \frac{\sin f}{a}\vec{Q}^*\right) =$$

$$= \frac{2\xi^2}{\eta^4}\frac{\eta\sin f}{na} - \frac{2e\sin f}{n\eta}\frac{\xi(\xi-\eta^2)}{pe} - \frac{2\xi}{n\eta}\frac{\sin f}{a} =$$

$$= \frac{2\xi\sin f}{na\eta^3}\{\xi-\xi+\eta^2-\eta^2\} = 0$$

以下、同様の単純計算を行ないさえすれば、次の良く知られた結果に到達する。

$$(68)\qquad (a,M) = -\frac{2}{na}$$

$$(69)\qquad (e,\omega) = \frac{\eta}{na^2e}$$

$$(70)\qquad (e,M) = -\frac{\eta^2}{na^2e}$$

$$(71)\qquad (i,\Omega) = \frac{1}{na^2\eta\sin i}$$

$$(72)\qquad (i,\omega) = -\frac{\cos i}{na^2\eta\sin i}$$

要素変化の式を書いて、終る事にする。

$$(73)\qquad \dot{a} = \frac{2}{na}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\chi}$$

$$(74)\qquad \dot{e} = \frac{\eta^2}{na^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\chi} - \frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\omega}$$

$$(75)\qquad \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\omega} - \frac{1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial\Omega}$$

$$(76)\qquad \dot{\Omega} = \frac{1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial i}$$

$$(77)\qquad \dot{\omega} = \frac{\eta}{na^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial i}$$

$$(78)\qquad \dot{\chi} = -\frac{\eta^2}{na^2e}\frac{\partial\varepsilon R}{\partial e} - \frac{2}{na}\left(\frac{\partial\varepsilon R}{\partial a}\right)$$

唐突に、近日点通過の時刻τの代りに、量χが現われて居るが、既に、(1)式で定義して置いたので混乱は無いであろう。一連の偏微分係数を求める際に、特に平均近点離角Mを用いたので、斯う云う事も容易に行なえたと云う次第である。

此処に述べた Poisson括弧を直接的に計算する方式が、教育の場などで広く行なわれる事を切望する。任意の中間軌道に対しても、本法の適用は勿論可能である。　(03506ma)