「Schwarzschild 解」の意味するもの
A comprehension for the solution due to Schwarzschild

井上　猛　（京都産業大学）
T. Inoue
Kyoto Sangyo University

Abstract. It is widely accepted that the general theory of relativity established by Einstein (1915) solved totally the problem of the excess advance which exists in the longitude of the perihelion of Mercury. This excess advance was found by Le Verrier (1859) when he tried to adjust his theory of the motion of Mercury to the observations of the passage of Mercury in front of the disk of the Sun. The same excess advance was equally necessary in the theory of Newcomb (1895). That is, Newcomb confirmed the Le Verrier's result.

The present author pointed out that the theory of Le Verrier for the motion of Mercury contains tiny errors and that because of this he was not able to well predict the passage phenomena of Mercury (Inoue, 1992). We revealed, in the case of Newcomb, that his theory also contains the same kind of errors (Inoue, 2000).

If one corrects the errors, one can obtain perfect theories of the motion of Mercury. This means that there never exist discrepancies between the theory of the motion and the passage observations in nineteen century.

Then, what did Einstein and Schwarzschild solve? There was no problem to be solved ! In order to legitimately understand, we propose the following postulate **"The Schwarzschild's solution gives exactly *the motion of the two-body problem in the Newtonian mechanics*"** .

Let us describe the system of Schwarzschild by (R, Φ) and that of Newton by (r, ϕ). The equations of the motion for Mercury take the form as follows in the system of Schwarzschild :

$$\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{R^2} = \frac{2m\mu}{R^3} + \frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - 2m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\Phi}{dt}\right) = \frac{2m}{R}\frac{dR}{dt}\frac{d\Phi}{dt}$$

For the problem of two bodies, the equations are given by the following forms :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0$$

With the aid of functions ρ and σ , we are able to combine the two systems (R, Φ) and (r, ϕ) as follows :

$$R = r + m\rho = r\left[1 + \frac{m}{r}\left\{\frac{2}{e^2}(1-\xi) - \frac{3u}{\eta} e \sin f\right\}\right]$$

$$\Phi = \phi + m\sigma = \phi + \frac{m}{p}\left\{3\left(f - \frac{u}{\eta}\xi^2\right) + \frac{2+2\xi+e^2}{e^2} e \sin f\right\}$$

The detailed explanations of the quantities are given in the text (in Japanese).

The relations satisfy 'the Schwarzschild condition' : when the quantity r tends to infinity, the difference between R and r tends to zero. It is the same for the difference between Φ and ϕ.

In the Newtonian mechanics, the elliptic orbit does not move and there is no advance in the longitude of the perihelion ϖ. Therefore, one revolution after the longitude ϕ takes simply the value : $\phi = \varpi + 2\pi$.

In the Schwarzschild system, the circumstances are different. At the moment of start, the quantity Φ obtains the value ϖ. But, so as to just return to the 'perihelion' , one should give the following value for the quantity Φ :

$$\Phi = \left\{ \varpi + \frac{6\pi m}{p} \right\} + 2\pi \ .$$

久しく心に留めて居て、人にも知って欲しいと願って居るものがある。それは、私かに尊崇して止まない平山清次先生がお書きになったものである。此処に添付するのは、甚だ御無礼な事かも知れないが「積年の懐いの吐露」として、御寛恕の程を請う次第である。

昭和五年(1930)十月、東京天文臺内に本部を置く日本天文學會が、日本天文學會編輯の下に、本格的な研究誌としての『日本天文學會要報』なるものを世に送り出さむとした。その「第一號」に、理事長の平山清次先生が、「發刊の辭」を述べて居られるのである。此処に全文を引用するのであるが、残念な事に“文字上の制約”から、本文の通りに打つ事が出来ない憾みがある。それ以外は、先生のお書きになったものの通りである。

發　刊　の　辭

日本天文學會理事長

理學博士　　平　山　清　次

現代の日本の學者が歐文で學術上の論文を書くのは、外國人がそれを讀む事を豫期する結果、便利を考へてさうするのであつて、徳川時代の儒者が自己の學識を表したい為めに殊更難解の字句を並列し文章を飾つた事と混同してはならない。英佛獨等の外國語によるよりも望ましいのはエスペラントの如き世界語を用ひる事であるが歐米諸國の學者が眞に此事に目醒めぬ限り實行は出來かねる。

國旗は 國家の符徴に外ならないが 言語は事實上民族を結束する締繩であり其表徴である。それであるから民族が其個性を維持せんとする志望を失はない限り言語は尊重されなくてはならない。海外より弘く有益な知識を吸收する為めに外國文を讀む事を怠ってはならぬが、然し其為めに自國語を蔑視したりしてはならない。

それであるから學術上の論文は、如何に世界的のものであつても、それを自國語で書くのは當然であつて、更にそれを外國文に綴つて弘く海外に發表するのが最も適當な處置である。事情によりそれを自國語だけに止めるのは自由であるが、外國文で發表して自國語で發表しないのは大なる誤と言はなければならぬ。

のみならず外國文と自國文と内容は同一でも著者の意想が自國文の方に適切に表はれるのは當然である。從つて其方に原作としての價値の多い事は無論である。

日本天文學會の役員の主張は實に此點に在る。其結果、定會の議決を經て實現したのは此要報である。事は小さいながらも思慮は十分に深く實行の意志は強固である。筆者は理事長として茲に役員を代表し此主意を會員諸氏並に關係ある識者に傳へる事を大なる光榮とするものである。

日本の天文學の前途は有望である。それが吾々の此新らしい計畫によって順當なる發達を遂げ、深遠なる宇宙と靈妙なる自然とが一層明確に示さるゝ事を得れば誠に幸である。

１．Le Verrierの研究(1859)に端を発する「水星近日点黄経ϖに於ける余剰の永年変化の問題」は、Einsteinの一般相対性理論(1915)に依って、完全解決を見た事になって居る。就中、重力場方程式に対するSchwarzschildの美麗な解(1916)は、Eddingtonの著書(1924)等を通じて広く知られて居る処である。「当該問題解決法」は、“現代の常識”である。

斯うした折りに「Le Verrierの研究には誤りがあった。その故に《余剰の永年変化》の出現を見る事になった」との結論を得た(Inoue, 1992)。その後の調査で「Newcombの研究(1895)にも、Le Verrier同様の誤りが在る。その為に一世紀当り43秒角の不等性が生ずる事になって居る」のが明らかになった(井上、2000)。

我々の主張をその儘に受け容れるならば、『件の問題そのものが存在しなかった』事になる。これは“現代の常識”に反する。然し、『我々の結果』を否定しなければならない理由を、我々は見つける事が出来ないのである。そこで**『Newton力学に於ける二体問題が表わす処のものは、Einstein理論に於ける Schwarzschild解が与えるものである』**と捉える事にする。斯うする事は可能である。此の事を以下で見て行く。

実は、十二年ほど前の事になるが、次の様な問題を「理論天文学」の後期試験に課して居る。

◎平面運動であるとして、水星近日点黄経に於ける余剰前進の問題に関連させて以下を問う。

(甲) Newton力学に於ける二体問題は次の形に書ける：

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \qquad \mu \equiv G\,(m_{\odot}+m^*) \quad ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0 \quad : \quad r^2\frac{d\phi}{dt} = h \quad .$$

(乙) Schwarzschildの謂わば一体問題は次の様に与えられる：

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} - R\left(\frac{d\Phi}{d\tau}\right)^2 = -\frac{mc^2}{R^2} - 3m\left(\frac{d\Phi}{d\tau}\right)^2 \quad ,$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(R^2\frac{d\Phi}{d\tau}\right) = 0 \quad : \quad R^2\frac{d\Phi}{d\tau} = H \quad .$$

問１．上で、Newtonの場合とSchwarzschildの場合とで文字の書き分けを行なった。その必要性の有無を、理由を付けて述べよ。

問２．此の問題は、その総てが Le Verrierに依る、水星の太陽面通過に対する条件方程式から出発して居る。此の事に付いて知れる処を述べてみよ。

問３．Schwarzschildの場合には、SiriusやCapella等の連星系に於ける運動をどの様に理解するのが良いか？　考えを述べよ。

問４．此の問題は、一般相対論との関連に於て、どの様に扱われるのが望ましいと考えるか？　考える処を記してみよ。

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^{-1}, \qquad \mu : mc^2 \ .$$

(90Z14V ゐのうへ たけし)

当時は「Le Verrierの研究に誤りがある」等と云った認識は、皆無であった。然し『文字書き分けの必要性』には考えが及んで居た様である。これが有ったればこそ「Le Verrier理論に誤りがあった」のに気付く事も出来れば「余剰前進問題の解決」に取り組んで行く事も出来たのであった。

上で、r及びϕは動径および経度を表わす。R及びΦは、それらに対応する「座標」である。Newton力学で言う絶対時間 tは、Schwarzschildの系では「座標時」に相当する。

量τは「固有時」を表わす。量cは「光の速さ」を表わし、量mは、長さの単位を有する“微小な定数”を表わす。量Gは万有引力定数を表わし、量$m_{\odot}$ は太陽の質量を、また量m^* は水星(惑星)の質量を表わす。

此の時に、量μを量 mc^2に等しいと置くか否かに付いては、大いに「議論の余地」の有る処と考えて居る。先に引用した Eddingtonの場合には量 mc^2は、$Gm_{\odot}$ に等しいと捉えるのが妥当と考えられる(同著:81頁～83頁)。 ところが別の著者の場合には、此の量 mc^2は「量μ即ち量$G(m_{\odot}+m^*)$に等しいと理解すべきである」と考えられるのである(Brumberg, 1991:1頁,2頁,5頁,76頁,82頁)。

水星の場合には、質量 m^*が、太陽の質量 $m_{\odot}$の 1.7×10^{-7} 倍でしかないのであるから「量 m^*の存在を無視する」と云う見方が有る様である。然し、それは的を射たものとは言い難い。何となれば、我々が問題として居る「余剰の前進量$\delta\varpi_{(s)}$」の大きさは「太陽の重力下で水星が公転運動する量」の 8×10^{-8} 倍でしか無いからである。詰り、1.7×10^{-7} の大きさの量を無視するのならば、 8×10^{-8} の大きさの物は更に積極的に無視しなければならない事になるからである。

此の問題は、真剣に取り組まなければならないものなのであるが、多くを考える事なく此処では、「単純に、量μは量 mc^2に等しい」と置いて、以下の議論に移る事にする。

2．先ずは、Einstein理論に於ける Schwarzschild解が与える「惑星運動の基本方程式」の導出を試みる。これを、行なうのに Eddingtonの著書を参考にしたい。同著の86頁及び87頁から一部を抜き書きしてみる。此処で、 dsは $cd\tau$の事である。

Differentiating with respect to ϕ, and removing the factor $\dfrac{d}{d\phi}\dfrac{1}{r}$,

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}=\frac{m}{h^2}+\frac{3m}{r^2} \qquad (39\cdot61),$$

with

$$r^2\frac{d\phi}{ds}=h \qquad (39\cdot62).$$

Compare these with the equations of a Newtonian orbit

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}=\frac{m}{h^2} \qquad (39\cdot71),$$

with

$$r^2\frac{d\phi}{dt}=h \qquad (39\cdot72).$$

In (39·61) the ratio of $\dfrac{3m}{r^2}$ to $\dfrac{m}{h^2}$ is $\dfrac{3h^2}{r^2}$, or by (39·62)

$$3\left(r\frac{d\phi}{ds}\right)^2.$$

For ordinary speeds this is an extremely small quantity — practically three times the square of the transverse velocity in terms of the velocity of light. For example, this ratio for the earth is ·0000 0003 . In prctical cases the extra (以下 87頁) term in (39·61) will represent an almost inappreciable correction to the Newtonian orbit (37·71) .

前節で指摘した様に、只今の Eddingtonの謂が一般には「何の疑問も抱かれる事なく」受け入れられて居るのである。此の方程式群が導かれる基となったものは、当然の事乍ら「Schwarzschildの計量」及び「測地線の方程式を解いて得られる積分」である。そこで再び同著から少しく引用して置く事にしよう。但し、「平面問題」に限定してのものとする。

$$\gamma=1-\frac{2m}{r} \qquad (38\cdot7),$$

$$ds^2=-\gamma^{-1}dr^2-r^2d\phi^2+\gamma c^2dt^2 \qquad (38\cdot8).$$

以上は、85頁に所載のものである。此処で Eddingtonは、光の速さｃを「速さの単位」に選んだので、(38･8)式に記したｃは、彼の表式には現われては居ない。続いて、86頁から積分表式を引用するが、此処でも我々流に書き換えたものを記す事にする。

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = h \qquad (39\cdot 41) \quad ,$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c\gamma} \qquad (39\cdot 42) \quad .$$

「基本となる方程式群は 既にEddingtonが与えて居るではないか」と、改めての導出を訝る向きもあるであろうが、我々は『文字の書き分けの必要性』を主張して居るのであるから、此処は「いちから」見て置きたいのである。

此の時に問題となるのが「Newton力学に於ける絶対時間ｔ」と「Einstein理論に於ける座標時ｔ」の間の関係である。此処では、「同一の文字“ｔ”」を「考えも無しに用いて居る」かの印象を与えるかも知れない。然し、『これらを同一視しても良い』と云うのが既に広く行なわれて居るので、此処はそれに依拠した迄である。

先ずは(38･7)式(38･8)式を、我々の文字記号で書いて置く。

(1) $$\gamma = 1 - \frac{2m}{R} \quad .$$

(2) $$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \gamma c^2 dt^2 - \gamma^{-1} dR^2 - R^2 d\Phi^2 \quad .$$

同様にして、(39･41)式(39･42)式も書き換えて置く。

(3) $$R^2 \frac{d\Phi}{d\tau} = H \quad ; \qquad R^2 \frac{d\Phi}{dt} \gamma^{-1} = H \quad .$$

(4) $$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\gamma} = \gamma^{-1} \quad .$$

以下に計算をして行く。

$$c^2 = \gamma c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \gamma^{-1} \frac{dR^2}{d\tau^2} - R^2 \frac{d\Phi^2}{d\tau^2}$$

$$c^2 = \gamma^{-1} c^2 - \gamma^{-3} \frac{dR^2}{dt^2} - \frac{H^2}{R^2}$$

此の表式を、独立変数ｔで微分する。然る後に各項を、因子 $-2\gamma^{-3}\frac{dR}{dt}$ で整除すれば次の表式に到達するであろう。

$$\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{H^2}{R^3}\gamma^3 + \frac{mc^2}{R^2}\gamma - \frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \gamma^{-1} = 0$$

運動方程式の体裁を整える為に、(3)式を用いて積分定数のＨを消去した形に導く。

(5) $$\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \gamma + \frac{mc^2}{R^2}\gamma - \frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \gamma^{-1} = 0 \quad .$$

以下では、先程「問題とした」量 mc^2を単純に量μに等しいと置く事にする。量ｍは充分に「小さい」として、これの自乗以上の量は総て無視する事とする。斯くして、次のEinstein理論に於ける「動径」に関する運動方程式が得られる。

(6) $$\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{R^2} = \frac{2m\mu}{R^3} + \frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - 2m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \quad .$$

これに対応する「偏角（経度）」に関する運動方程式は、(3)式を次の形に書いた後に時間ｔで両辺を微分して導く事が出来る。

$$R^2 \frac{d\Phi}{dt} = \gamma H = H\left(1 - \frac{2m}{R}\right)$$

(7) $$\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\Phi}{dt}\right) = \frac{2m}{R}\frac{dR}{dt}\frac{d\Phi}{dt} \quad .$$

上記の(6)式および(7)式の表わすものが「Einstein理論に於ける平面惑星運動に対する基本方程式」である。勿論、此処で対象として居るのは、太陽と一個の惑星のみである。これらの表式が、只今の立場で惑星運動を論ずる際の基本方程式である事を確認するには以下の文献を参照すれば充分であろう。

Brumberg : *Essential Relativistic Celestial Mechanics* p.82 (3.1.49)式

平山清次 : **天體力學** 一般攝動論 p.71 (1.3)式

此の「二体問題」に対する「Newton力学に於ける基本方程式」は、「文字書き分け」の主張に基づいて、次の形に書かれる事になる。

(8) $$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad ,$$

(9) $$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0 \quad .$$

初等的な事柄を長々と述べて来たが、我々の言わむとする処を此処で強調して置こう。

「Einstein理論に於ける基本方程式」(6)式および(7)式が表わす惑星運動は「Newton力学に於ける基本方程式」(8)式および(9)式が与えるものに完全に一致する。

3. 問題の、「Einstein理論の系を記述する量 (R, Φ)」と「Newton力学の系を記述する量 (r, ϕ)」とを次の関係で結び付ける。

(10) $$R = r + m\rho \quad ,$$

(11) $$\Phi = \phi + m\sigma \quad .$$

此処に、量ρおよび量σは「以下の条件」を満たすべく決定されなければならない未知量である。

(6)式および(7)式を記述する量Rおよび量Φを、(10)式および(11)式の関係に依って量rおよび量ϕに置き換えるなら、直ちに(8)式および(9)式が得られる

未知量のρおよびσを求めるのに、方程式(6)式および(7)式を積分した形を用いる。そこで、先ずは(7)式から考える事にしよう。これは、次の形に書き換える事が出来る。

$$\left(R^2\frac{d\Phi}{dt}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\Phi}{dt}\right) = \frac{2m}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

従って、容易に積分する事が出来る。結果は以下の如しである。

(12) $$R^2\frac{d\Phi}{dt} = H\cdot\exp\left(-2\frac{m}{R}\right) \quad , \qquad (H : 積分定数) \quad .$$

これを、(6)式に代入し、量mの自乗以上の微小量を無視すれば次の表式が得られる。

$$\frac{d^2R}{dt^2}-\frac{H^2}{R^3}+\frac{\mu}{R^2}=\frac{2m\mu}{R^3}+\frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-\frac{6mH^2}{R^4}\quad .$$

因子に微小量mを有する項では、「Newton力学」に於ける「二体問題の解表式」を、量Rおよび量Φで書き表わしたものを用いても構わないであろう。そこで、エネルギー積分の次の形のものを取り入れる。

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\left(R\frac{d\Phi}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\mu}{R}=E\quad ,\quad (E\ :\ 積分定数)\quad .$$

斯くして、最上段の表式は、容易に積分可能な次の形へと導かれる事になった。

(13) $$\frac{d^2R}{dt^2}-\frac{H^2}{R^3}+\frac{\mu}{R^2}=\frac{8m\mu}{R^3}+\frac{6mE}{R^2}-\frac{9mH^2}{R^4}\quad .$$

積分の結果は以下の通りである。此処で、量Cは積分定数である。

(14) $$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{H^2}{R^2}-\frac{2\mu}{R}=-\frac{8m\mu}{R^2}-\frac{12mE}{R}+\frac{6mH^2}{R^3}+C\quad .$$

これに、先に設定した関係式(10)式(11)式を代入して行く訳である。この時、次の表式を用いるのは当然の事である。

(15) $$R=r\left(1+\frac{m\rho}{r}\right)\quad ,$$

(16) $$\frac{dR}{dt}=\frac{dr}{dt}+m\frac{d\rho}{dt}\quad .$$

以下の計算の流れを容易にする目的で、「Newton力学」に於ける種々の関係式を一覧の形で記して置く事しよう。

(17) $$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\mu}{r}=E\quad ,\quad [エネルギー積分]\quad .$$

(18) $$r^2\frac{d\phi}{dt}=h\quad ;\quad (h\ :\ 積分定数)\quad [角運動量積分]\quad .$$

(19) $$E=-\frac{\mu}{2a}\quad ;\quad h=\sqrt{\{\mu p\}}\quad ,\ p\equiv a(1-e^2)\quad .$$

此処で、量aおよび量eは楕円軌道の長半径および離心率である。

準備が整ったので(15)式(16)式を(14)式に代入する。この時に定数の間に以下の等式の成立を要請する。

(20) $$C=2E\quad ,\quad H=h\quad .$$

その結果、共通因子のmで整除の後に、未知量ρに対する微分方程式として次の形のものが得られる。

(21) $$\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt}-\frac{\mu p}{r^3}\rho+\frac{\mu}{r^2}\rho=-\frac{4\mu}{r^2}-\frac{6E}{r}+\frac{3\mu p}{r^3}\quad .$$

再び、楕円軌道に対して成立する関係式を書き出して置こう。

(22) $$\frac{dr}{dt}=\frac{na}{\eta}e\sin f\quad ,\quad \frac{d\phi}{dt}=\frac{df}{dt}=\frac{h}{r^2}=\frac{n\xi^2}{\eta^3}\quad .$$

此処で、量fは真近点離角である。更に、次の略記号を用いた。

(23) $$n\equiv\sqrt{\left\{\frac{\mu}{a^3}\right\}}\quad ,\quad \eta\equiv\sqrt{\{1-e^2\}}\quad ;\quad \xi\equiv\frac{p}{r}=1+e\cos f\quad .$$

初等的な関係式等を並べて来たが、結局は未知量ρに対する方程式は次の形に導かれる。

(24) $$\frac{d\rho}{df}\cdot e\sin f+(1-\xi)\rho=\frac{3\eta^2}{\xi}-4+3\xi\quad .$$

此の方程式を満たす量ρは、「人工系の方法（定数変化法）」に依っても解く事が出来て次の形を取る。結果の正当性は、これを(24)式に代入してみれば容易に確かめられる処である。此処で、離心近点離角uに登場して貰う必要があった。

(25) $$\rho = \frac{2}{e^2}(1-\xi) - \frac{3u}{\eta} e \sin f \qquad .$$

次には、只今の「動径」方向の関係を用いて、「経度」方向の差σを求めて行く。

$$R^2 \frac{d\Phi}{dt} = (r+m\rho)^2 \cdot \left(\frac{d\phi}{dt} + m\frac{d\sigma}{dt}\right) =$$

$$= r^2\frac{d\phi}{dt} + 2rm\rho\frac{d\phi}{dt} + r^2 m\frac{d\sigma}{dt} + \cdots\cdots =$$

$$= h\cdot\exp\left(-\frac{2m}{R}\right) = h - \frac{2hm}{R} + \cdots\cdots =$$

$$= r^2\frac{d\phi}{dt} - \frac{2np}{\eta^3} m\xi + \cdots\cdots$$

因子mの一次の項を等置する事に依って、未知量σに対する方程式を導く事が出来る。

$$r^2\frac{d\sigma}{dt} + 2\frac{\rho}{r} r^2\frac{d\phi}{dt} = -\frac{2np}{\eta^3}\xi \qquad ,$$

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = na^2\eta \quad ; \quad dt = \frac{\eta^3}{n\xi^2} df \qquad .$$

此処でも、真近点離角fに関する微分方程式に書いて置く。

(26) $$p\frac{d\sigma}{df} = -2\xi(1+\rho) \qquad .$$

これも容易に解く事が出来て、次の形の解が得られる。

(27) $$p\sigma = 3\left(f - \frac{u}{\eta}\xi^2\right) + \frac{1}{e^2}(2 + 2\xi + e^2)\, e \sin f \qquad .$$

以上で、目的は総て達成された。即ち「Einstein理論の系」と「Newton力学の系」とを結び付けるべく設定した関係式(10)式(11)式が、滞り無く求められたのである。これらを書いてみれば以下の如しである。

(28) $$R = r + m\rho = r\left[1 + \frac{m}{r}\left\{\frac{2}{e^2}(1-\xi) - \frac{3u}{\eta} e \sin f\right\}\right] \qquad ,$$

(29) $$\Phi = \phi + m\sigma = \phi + \frac{m}{p}\left\{3\left(f - \frac{u}{\eta}\xi^2\right) + \frac{2+2\xi+e^2}{e^2} e \sin f\right\} \qquad .$$

これで見れば明らかな様に、$r\to\infty$および$p\to\infty$に際して、$R\to r$および$\Phi\to\phi$が実現し所謂「**Schwarzschild条件**」を満たして居るのが判る。

4. 量Rが「動径」を表わすものならば、「近日点」に於ては、時間に依る「微分」商は「零」に等しくならなければならない。これを確かめる目的で、(22)式に与えた関係式を改めて書き出して置く。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{na}{\eta} e \sin f \quad , \quad \frac{df}{dt} = \frac{n\xi^2}{\eta^3} \qquad (22)$$

更に、離心近点離角uに関する「微分」商も書いて置く。

(30) $$\frac{du}{dt} = \frac{n\xi}{\eta^2} \qquad .$$

(31) $$\frac{dR}{dt} = \frac{na}{\eta} e \sin f + m\left\{\frac{2}{e^2}\cdot\frac{n\xi^2}{\eta^3} e \sin f + \right.$$

$$\left. -\frac{3}{\eta}\cdot\frac{n\xi}{\eta^2} e \sin f - \frac{3u}{\eta}\cdot\frac{n\xi^2}{\eta^3} e \cos f\right\} = 0 \qquad .$$

此処で、量fや量uは「Newton力学」に於ける「二体問題の解」を記述する量なのであるから、$f=0$ では $u=0$ である。此の時、水星（惑星）は「近日点」に在って、動径rは「近日点距離」を与える。上式から明らかな様に、量Rも、此の時点で「近日点距離」を与える事になって居る。

「Newton力学」に於ける「二体問題」では、一公転の後には $f=2\pi$ となりuも 2π に等しくなる。当然の事ながら、動径rは、再び「近日点距離」を与える事になって居る。然し、量Rの方は、上記(31)式を成立させるには、量fは 2π とは少しばかり異なる値を取らなければならない事になって居る。そこで、量mの大きさの微小量 δ_f の存在を仮定して、(31)式の成立を図る。量mの一次の大きさに限定して考えるのは当然の事である。

$$f \equiv 2\pi + \delta_f \quad ,$$

$$\frac{nae}{\eta}\delta_f + m\left\{O(\delta_f) - O(\delta_f) - \frac{6\pi}{\eta}\cdot e\cdot\frac{n(1+e)^2}{\eta^3}\right\} = 0 \quad ;$$

(32) $$\delta_f = \frac{3m}{p}\cdot\frac{(1+e)^2}{\eta}\times 2\pi \quad .$$

同様の事を、「経度」の方に付いても見て行く。「Newton力学」に於ける「二体問題」では、経度 ϕ は、近日点黄経 ϖ を用いる時は次の形に与えられる。

(33) $$\phi = \varpi + f \quad .$$

従って、$f=0$ に於ては $\phi=\varpi$ である。量 Φ の方はと言えば、(29)式から明らかな様に此の時は、Φ も $\Phi=\varpi$ である。

「Newton力学」では、初め「近日点」に在った水星（惑星）は、量fが $f=2\pi$ となった時に一公転を終え、経度 ϕ は計算上 $\phi=\varpi+2\pi$ となる。端的に言えば、$\phi=\varpi$ の儘なのである。従って、「近日点」に《前進》も無ければ《後退》も無い。

同じ事が、量 Φ に付いても言えるか？　言えない !!!　「Einstein理論」の枠組みでは「動径」Rが、再度「近日点距離」を与える時には、量fは $f=2\pi+\delta_f$ なる値を取るのであった。それ故に、「経度」Φ に対しては、(29)式を次の様に扱わなければならない事になって居る。

$$\Phi = \varpi + (2\pi+\delta_f) + \frac{m}{p}\left[3\left\{2\pi - \frac{2\pi}{\eta}(1+e)^2\right\} + O(\delta_f)\right] =$$

$$= \varpi + 2\pi + 2\pi\times\frac{3m}{p}\cdot\frac{(1+e)^2}{\eta} + \frac{m}{p}\times 3\left\{2\pi - \frac{2\pi}{\eta}(1+e)^2\right\} \quad ,$$

(34) $$\Phi = \varpi + 2\pi + \frac{6\pi m}{p} \quad .$$

此処でも、量 2π の存在は無視して考えても構わない。然し、等式 $\Phi=\varpi$ は、明らかに成立し得ず、量mの大きさの「前進」を有する事になって居る。此の「前進量」を与える表式は、将に「Einsteinの一般相対性理論」が、「水星近日点黄経 ϖ に於ける余剰の永年変化の問題を解いた」とする「表式」そのものである。

以上で、我々が、本小論で『論じたいと考えた処のもの』は総て述べ終った事になる。

小論を閉じるに当り、フランス航空宇宙研究所のマルシャル博士に敬意と謝意を表して置きたい。博士には、当該問題に付いて、折々に、議論に乗って頂き懇切な助言を受けて来た。そのお蔭で「より深く」此の問題を考える事も出来たと云う次第である。

Nous sommes très heureux de dire à haute voix que Docteur Christian MARCHAL, Office national d'études et de recherches aérospatiales (ONERA) France, nous a donné beaucoup de suggestions utiles grâce auxquelles nous avons pu achever et perfectionner les études actuelles dont nous remercions de tout notre cœur.

本小論で扱った Schwarzschildの系に関しては、此処とは異なる観点から論じた事がある（井上，1989）。

参考文献

1. Brumberg, V. A. : 1991, *Essential Relativistic Celestial Mechanics* Adam Hilger

2. Eddington, A. S. : 1924, *The Mathematical Theory of Relativity* Cambridge University Press

3. Einstein, A. : 1915, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 47*

4. 平山清次 : 1930, 天體力學 ： 一般攝動論　岩波書店

5. 井上　猛 : 1989, 第２３回天体力学研究会集録, p. 156

6. Inoue, T. : 1992, *Proceedings of the Twenty-Fifth Symposium on Celestial Mechanics*, p. 205

7. 井上　猛 : 2000, 第３２回天体力学N体力学研究会集録, p. 147

8. Le Verrier, U. J. : 1859, *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris*, V

9. Marchal, C. : 2000, Private communications

10. Newcomb, S. : 1895, *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, VI

11. Schwarzschild, K. : 1916, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. -Phys. Tech.*