草津天体力学N体力学研究会集録

平成13年3月16日–18日

群馬県草津温泉草津セミナーハウス

2001: a symplectic odyssey

シンプレクティック積分法の輝き

Proceedings of the 33rd Symposium on Celestial Mechanics

March 16–18, 2001 at Kusatsu-Onsen, Gunma, Japan

Editors: E. Kokubo, T. Ito, and H. Arakida

「Le Verrier 中間軌道」の正しい把捉
True Features of "the Le Verrier's Intermediary Orbit"

井上　猛　（京都産業大学）
T. Inoue
Kyoto Sangyo　University

Abstract. A special orbit is introduced (Inoue, 1992) in order to express what Le Verrier treated for the purpose of including the influences due to the planet Venus (Le Verrier, 1859). "The Le Verrier's intermediary orbit" is one of orbits which retrograde 43 seconds of arc per century, if one compares this orbit with a fixed ellipse.

The study aims to verify the fact that "the Le Verrier's orbit" is given by the solution of a Hamilton-Jacobi's partial-differential equation. In the previous studies, the momenta corresponding to the coordinates, radius vector & longitude are not explicitely introduced in 'the energy integral'.

1．水星の運動に及ぼす金星の影響を、Le Verrierは、初発の零次軌道の中に巧みに取り込んだ。彼の"取り扱い"が齎らす処のものを端的に示す目的で、二個の'離心率'を有する『中間軌道』なるものを提示したのであった(Inoue, 1992)。これには一寸した修正が必要であった。以下に、正しい表式を列挙して置く(Inoue, 1994)。

(1) $$u - e_M \sin u = M , \quad M = \int_{t_0}^{t} n\,dt + \chi \quad ;$$

(2) $$n \equiv \sqrt{\{\mu / a^3\}} , \quad \mu = G(m_{太陽} + m_{水星}) \quad ;$$

(3) $$\tan(f/2) = \sqrt{\{(1+e_M)/(1-e_M)\}} \cdot \tan(u/2) \; ;$$

(4) $$r = a(1 - e_r \cos u) ,$$

(5) $$\phi = \varpi + f \; ;$$

(6) $$\Delta e \equiv e_r - e_M \equiv +1.53\,8156 \times 10^{-8} \quad .$$

此処で、a、e_M；ϖ及びχは、長半径、離心率、近日点黄経及び元期に於ける平均近点離角に類似の定数を、M、u及びfは平均近点離角、離心近点離角及び真近点離角に類似の変数を表わすものとする。変数r及びϕは、極座標としての、動径及び黄経を表わして居る。

此の軌道に関して、既に、次の様な扱いをして来た(Inoue, 1992 ; 井上、1998)。
① 上記軌道が有する'エネルギー積分'を計算。
② これを Hamilton 函数として、要素変化の式を解く。
その結果、"当該軌道が、一世紀当り43秒角、近日点黄経ϖに後退の永年変化を包含して居ると云うのが明らかになった"として来たのであった。

本小論の目的は、"只今の'エネルギー積分'を Hamilton 函数と見做して、要素変化の式を解く"と云うのが、果たして、的を射たものであったか否かを知る事である。これに答えるには、極座標の動径r及び黄経ϕに共軛な運動量として導入した、p_r及びp_ϕが適切なものであったか否かを確認すれば良い。そこでは、運動量p_r及びp_ϕが、次式で与えられるとしたのであった（井上、2000）。

(7) $p_r \equiv \dot{r} = n a e_r \sin u/(1-e_M \cos u)$,

(8) $p_\phi \equiv r^2\dot{\phi} = n r^2 \sin f/\{\sin u\ (1-e_M \cos u)\}$.

以下に於ては、煩瑣を避ける為に量 e_Mを単にeと表記する事にする。座標 : r 、ϕ及び速度 : $\dot{r}$、r $\dot{\phi}$ を考慮する時は 「Le Verrier 中間軌道」なるもの次の形の‘エネルギー積分’を有する。

(9) $-\mu/(2a) = \{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)/2\} - \{\mu/r + \varepsilon R\}$,

(10) $\varepsilon R \equiv \mu(\Delta e/e)\{-1/a+3/r-a/r^2-ap/r^3\}$;

此処で、pなる表記は、運動量と紛らわしいが、以下の量を略記したものである。

(11) $p \equiv a\eta^2$, $\eta \equiv \sqrt{\{1-e^2\}}$.

我々は、只今の(9)式(10)式に依る表式が、(7)式(8)式を通じて、次の形の Hamilton 函数 H を与えると捉えたのであった。

(12) $H \equiv H(r,\phi\ ;\ p_r,p_\phi) = \{(p_r^2+p_\phi^2/r^2)/2\} - \{\mu/r + \varepsilon R\}$.

此の事の正当性を吟味する目的で、此の表式を基に、Hamilton-Jacobi の偏微分方程式を立てて、これを解いてみる。上記の 「Le Verrier 中間軌道」が得られるならば、我々のこれ迄の取り扱いは、総て正しかったと云う事になる。

2．以下に於ては、一連の計算を列挙して行く事にする。

Hamilton-Jacobi の偏微分方程式 :

(13) $\partial W/\partial t + H(r,\phi\ ;\ \partial W/\partial r, \partial W/\partial \phi) = 0$,

(14) $W = W(r,\phi\ ;\ \alpha_r, \alpha_\phi\ ;\ t)$.

此処に、α_r, α_ϕ は、積分定数である。

運動量 : p_r、p_ϕが、未知函数 W に依って、次の様に与えられるのであった。

(15) $p_r = \partial W/\partial r$, $p_\phi = \partial W/\partial \phi$.

更に、解表式は、新たな積分定数をβ_r, β_ϕ とする時、次の形を取る。

(16) $\beta_r = \partial W/\partial \alpha_r$, $\beta_\phi = \partial W/\partial \alpha_\phi$.

常套手段に訴えて、求める未知函数 W に次の形を要請する。

(17) $W \equiv -\alpha_r t + \alpha_\phi \phi + W_1(r,-\ ;\ \alpha_r,\alpha_\phi)$.

此の $W_1(r,-\ ;\ \alpha_r,\alpha_\phi)$ に対しては、次の積分表示が得られる。

(18) $$W_1 = \int_{r0}^{r} \sqrt{\{-\alpha_\phi^2/s^2+2\mu/s+2\alpha_r+2\mu\Delta e(-1/a+3/s-a/s^2-ap/s^3)/e\}}\, ds .$$

これは、積分変数 s を、以下の様に選ぶ時は、容易に解く事の出来るものである。

$$s \equiv a^*(1-e^*\cos u^*) = p^*/(1+e^*\cos f^*) \quad ; \tag{19}$$

$$s = r_0 = a^*(1-e^*) \quad ; \quad (u^*=0\ ,\quad f^*=0) \quad . \tag{20}$$

此処に、星印 *の付いた量は、以下の様に与えられるものである。

$$\mu^* p^* \equiv \alpha_\phi{}^2 + 6\mu p \mathbb{A}\mathbb{e}/(e\eta^2) \quad , \tag{21}$$

$$\mu^* \equiv \mu(1+4\mathbb{A}\mathbb{e}/e) \quad , \tag{22}$$

$$\mu^*/a^* \equiv -2\alpha_r + 2\mu\mathbb{A}\mathbb{e}/(a e) \quad , \tag{23}$$

$$a^* = a(1+2\mathbb{A}\mathbb{e}/e) \quad , \tag{24}$$

$$e^* = e(1-3\mathbb{A}\mathbb{e}/e) \quad . \tag{25}$$

平均運動 n^*は、次の関係を満たす。

$$n^* \equiv \sqrt{\{\mu^*/a^{*3}\}} = \sqrt{\{\mu/a^3\}}\cdot(1-\mathbb{A}\mathbb{e}/e) = n\cdot(1-\mathbb{A}\mathbb{e}/e) \quad . \tag{26}$$

以上の準備の基に、解表式を書き出して行く。

$$\beta_r = \partial W/\partial\alpha_r = -\ t + \partial W_1/\partial\alpha_r \quad . \tag{27}$$

これは、次の形に書く事が出来る：

$$\left\{\begin{aligned} & n^*(t+\beta_r) = \{1+\mathbb{A}\mathbb{e}(1+e^{*2})/e^{*3}\}\cdot(u^*-e^*\sin u^*) + \\ & +\{\mathbb{A}\mathbb{e}(2e^{*2}-3)/e^{*3}\}u^* + \mathbb{A}\mathbb{e}(1-3e^{*2})/(e^{*3}\eta^*)\cdot(2f^*+e^*\sin f^*) \ . \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$\beta_\phi = \partial W/\partial\alpha_\phi = +\ \phi + \partial W_1/\partial\alpha_\phi \quad . \tag{29}$$

これを、次の形に書くのは容易な事である：

$$\left\{\begin{aligned} & \phi = \beta_\phi + f^* + \mathbb{A}\mathbb{e}\{-4/(e^*\eta^{*2})\}\cdot f^* + \\ & +\mathbb{A}\mathbb{e}\{\eta^*/e^{*3}\}\cdot(M^*-3u^*) + \{\mathbb{A}\mathbb{e}/(e^{*3}\eta^{*2})\cdot(2f^*+e^*\sin f^*) \ . \end{aligned}\right. \tag{30}$$

以上で Hamilton-Jacobiの偏微分方程式を解くと云う計算は、総て為し終えた事になる。残るは、これが、所望の「Le Verrier中間軌道」を表わして居るか否かを確かめるのみである。

３．先ず初めに、(5)式の経度ϕと、(30)式の経度ϕとが同一であると云う事を要請して変数 f と変数 f^* との間の関係を導いて行く。

$$\left\{\begin{aligned} & f = f^* + \mathbb{A}\mathbb{e}\{-4/(e^*\eta^{*2})\}\cdot f^* + \\ & +\mathbb{A}\mathbb{e}\{\eta^*/e^{*3}\}\cdot(M^*-3u^*) + \{\mathbb{A}\mathbb{e}/(e^{*3}\eta^{*2})\cdot(2f^*+e^*\sin f^*) \ . \end{aligned}\right. \tag{31}$$

これで、変数 f^* に依って「Le Verrier中間軌道」が、余す処なく表わされ得るのが確認された事になる。
次には「Kepler方程式」に相当の(1)式が、(28)式から導かれ得るか否かを見て行く事にする。(28)式には変数 f^* が含まれて居るので、これを変数 u^* に書き換えて行く必要がある。次の近似表式は、此の目的の為に有用なものとなる。

(32) $$f^* = u^* + e^* \sin u^* \ , \qquad f = u + e \sin u \quad .$$

先ず、(31)式の関係を(28)式に代入し、続いて、これに只今の(32)式を考慮すれば、次の表式に到達する。

(33) $$\left\{\begin{aligned} & n^*(t+\beta_r) = u^* - e^* \sin u^* + \\ & \quad + \Delta e\{(4/\eta^* - 5)/e^*\}\cdot(u^* + e^* \sin u^*) + \\ & + (1-3e^{*2})\eta^*\cdot\{(u+e \sin u) - (u^* + e^* \sin u^*)\} + \\ & \qquad + \Delta e\{(3-12/\eta^*)/e^*\}\cdot(u^* + e^* \sin u^*)\cdot e^{*2} + \\ & \qquad\qquad + \Delta e(3/e^*)\cdot u^*\cdot e^{*2} \quad . \end{aligned}\right.$$

此の件に関しての Le Verrier の扱いに合わせて、上記表式中の、e^{*2}を係数に持つ項を無視する。勿論、量η^* は1に置き換える。そうすれば、(33)式は次の様に簡単になる。

(34) $$\left\{\begin{aligned} & n^*(t+\beta_r) = u^* - e^* \sin u^* + \\ & \quad - (\Delta e/e^*)\cdot(u^* + e^* \sin u^*) + \\ & \quad + (u+e \sin u) - (u^* + e^* \sin u^*) \quad . \end{aligned}\right.$$

微小量 Δeを係数に持つ項では、u と u^*およびe と e^*とを混同しても構わないであろう。これを考慮した表式を書いて置く。

(35) $$\left\{\begin{aligned} & n^*(t+\beta_r) = u^* - e^* \sin u^* + \\ & + (1 - \Delta e/e)\cdot(u+e \sin u) + \\ & \qquad - u^* - e^* \sin u^* \quad . \end{aligned}\right.$$

此処で、次の関係の成立は、その導入から明らかである。

(36) $$M^* = n^*(t+\beta_r) = u^* - e^* \sin u^* \quad .$$

斯くして、我々は、(28)式を次の形に書き換える事が出来る処まで来た。

(37) $$\left\{\begin{aligned} & 0 = (1 - \Delta e/e)\cdot(u+e \sin u) + \\ & \quad - \{M^* + e^* \sin u^*\} - e^* \sin u^* \quad . \end{aligned}\right.$$

更に、(26)式に遡って考えるならば、次の等式の成立する事に気付く。序でに、(25)式も再掲して置く。

(38) $$(1 + \Delta e/e)\cdot M^* = (1 + \Delta e/e)\cdot n^*(t+\beta_r) = M \quad .$$

$$(25) \ : \ e^* = e(1 - 3\Delta e/e) \quad .$$

これらを(37)式に考慮すれば、次の表式に到達する。

(39) $$M = u + e \sin u - 2e(1 - 2\Delta e/e)\cdot \sin u^* \quad .$$

此処で、「Le Verrier中間軌道」の表式(1)式を書き出す。

(40) $$M = u - e_M \sin u \quad .$$

先に(8)式の直ぐ下で述べた処であるが、此処での e は、量 e_M を略記したものである。従って、変数 u^* と変数 u との間に、次の関係を要求するのは「自然な事」と言うべきであろう。

(41) $$(1 - 2\Delta e/e)\cdot\sin u^* \equiv \sin u \quad .$$

これは、(31)式を勘案する時、 $f^*=0$ に対して $f=0$ が成立しなければならないのが知れ、(32)式を通じて、$u^*=0$ の時は $u=0$ でなければならない事とも矛盾しない。上の関係は、次の等式の成立を促す。

(42) $$\begin{cases} (1 + 2\Delta e/e)\cdot\cos u = \cos u^* + 2\Delta e/(e\cdot\cos u^*) \quad , \\ (1 + 2\Delta e/e)\cdot\sin u = \sin u^* \quad . \end{cases}$$

これに伴って動径 r はどの様に表わされるのであろう？「Le Verrier中間軌道」に於ては(4)式で見た様に、次の形に表わされるのであった。

(43) $$r = a(1 - e_r \cos u) \quad .$$

此処で、量: a、e_r、u を、只今の量: a^*、e^*、u^* に結び付ける為に、(24)式及び(6)式と(25)式の関係から、次の形の等式を導いて置く。

(44) $$a = a^*(1 - 2\Delta e/e) \quad , \quad e_r = e(1 + \Delta e/e) = e^*(1 + 4\Delta e/e) \quad .$$

これらに依って、所望の動径 r の表式が次の様に与えられるのが知れた。

(45) $$\begin{cases} r = a(1 - e_r \cos u) = \\ \qquad = a^*(1 - e^* \cos u^*) - 2a^*\Delta e\{1/e + 1/(\cos u^*)\} \quad . \end{cases}$$

これは、充分に、受容可能なものと考えられる。変数 u^* が、 $\pi/2$ に近い値を取る時の不都合は、改めて考えるものとする。

4．以上から、(12)式を Hamilton 函数とする正準方程式系の解に依って、我々が主張して来た「Le Verrier中間軌道」が、余す処なく表わされ得ると云うのが明らかとなった。斯くして、第25回天体力学研究会で述べて以来、一貫して論じて来た『水星近日点黄経に於ける余剰の永年変化の問題』に対する我々の理解は、『総てが正しかった』と云うのが判明した事になる。

参考文献

1. Inoue, T. : 1992, *Proceedings of the Twenty-Fifth Symposium on Celestial Mechanics.*
2. Inoue, T. : 1994, *Proceedings of the Twenty-Sixth Symposium on Celestial Mechanics.*
3. 井上　猛 : 1998, 第３０回天体力学研究会集録.
4. 井上　猛 : 2000, 第３２回天体力学研究会集録.
5. Le Verrier, U. J. : 1859, *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris,* V.

(01503J)