水星近日点前進の問題 Newcombの場合
Newcomb's case for the appearance of the excess advance in the longitude of the perihelion of Mercury

井上　猛　（京都産業大学）
T. Inoue
Kyoto Sangyo University

Abstract. It is Le Verrier who pointed out the first the existence of the excess advance in the longitude of the perihelion of Mercury (Le Verrier, 1859). This is understood that the excess amount corresponds to a disrepancy between his theory of the motion of Mercury and the observations of Mercury's transits on the disk of the Sun. After him, it is Newcomb who verified the phenomenon (Newcomb, 1895).
We now know that this quantity is of the order of 43 arcseconds per century and that it is the Einstein's general theory of relativity which solved totally this problem in forcing to change our comprehension about the space and the time.
On the contrary, we insisted to reexamine the Le Verrier's theory of the motion of Mercury (Inoue, 1992). The Newcomb's theory is also the case and we found here the very reason why such a discrepancy appears in the motion of Mercury.
Our result shows that the Newtonian Mechanics is perfect to describe the motion of whole celestial bodies.

1．『水星近日点黄経に於ける余剰永年変化の問題は、“余剰前進”の存在を最初に指摘した Le Verrier (1859)の研究、更にはそれが確かであるとした Newcomb(1895)の研究にまで遡って調べられなければならない事柄である。Einstein (1915) の一般相対論に依る議論は、斯かる調査が済んでからである。』と、**“一貫して”**主張して来て居る処である (Inoue, 1992)。

此の中の Le Verrier の場合は、曲折を経ながらも我々の立場での解決を見る事が出来た (井上､1998)。 これに対して、Newcomb の場合は、扱いが Le Verrier の夫とは**“微妙に異なって居る”**のである。それにも拘らず、余剰前進は同様に生ずると云うのであるから仲々に解決する事が出来ないで居た。此の度、解決する事が出来て結果を見てみるならば両者が相互に強く関連し合って居るのに気付かされる。従って、Newcomb の場合を論ずるのに、 Le Verrier の場合の議論が有効となって来る事になる。

そこで、改めて Le Verrier の場合が如何様であったかを一通り整理して置く事にする。

①水星の運動を記述する為に、中心差および動径を、平均近点離角 M の Fourier級数に展開する。此の表式中の sin M および cos M に比例する項の中に、金星に依る影響を水星軌道の離心率を**“二様に”**改変する形で取り込んだ。
②二様に為された改変量は、夫々に微小であり、改変量同士の**“差”**に至っては更に微小である。しかし、 Le Verrier 理論の精度からすれば、此の**“差”**の存在を無視する事は許されない。斯くして得られた表式群は、二体問題の解が表わすもの（楕円軌道のそれ）とは明らかに異なるものとなって居る。
③上記表式群が表わす軌道が如何なるものであるか、中でも、楕円軌道と如何なる関係にあるかは明らかにされるべき事柄である。これは可能なのであって、結果は、一世紀当り43秒角、近日点黄経 ϖ に永年後退が存在して居る楕円軌道であると云う事になった。
④ Le Verrier 採用の摂動処理法では、初発の水星軌道が斯かる後退軌道となって仕舞うのである。然るに、彼は斯かる事態の発生に気付かず、従って、補正も修正も加える事はしなかった。これが、後に、“一世紀当り43秒角 (Le Verrierの結果は 38.″3/100年) 合わない”と言われる問題を惹起する事になる。

⑤ Le Verrier が採用した“手法”が齎らす処のものを、端的に示す目的で、以下の様な式群で表わされる、二個の‘離心率’を有する『中間軌道』を提示した（Inoue, 1992）。

$$(1)\qquad u - e_M \sin u = M \;,\qquad M = \int_{t_0}^{t} n\,dt + \chi \quad ;$$

$$(2)\qquad n \equiv \sqrt{\{\mu/a^3\}} \;,\qquad \mu = G(m_{太陽} + m_{水星}) \quad ;$$

$$(3)\qquad \tan(f/2) = \sqrt{\{(1+e_M)/(1-e_M)\}} \cdot \tan(u/2) \;;$$

$$(4)\qquad r = a(1 - e_r \cos u) \;,\quad \phi = \varpi + f \;;$$

$$(5)\qquad e_r - e_M \equiv +1.53\,8156 \times 10^{-8} \;.$$

ここで、a、e_M；ϖ及びχは、長半径、離心率及び近日点黄経に類似の定数を、M、u及びfは平均近点離角、離心近点離角及び真近点離角に類似の変数を表わすものとする。変量r及びϕは、動径及び真黄経を表わす事になって居る。

2．　我々が、何の故に上記の如き表式群を提示したかと言えば、Paris 天文台報・第二巻に所載の Le Verrier の扱いが以下の様であったからである（Le Verrier, 1856）。

軌道の離心率 e 及び近日点黄経 ϖ に微小な変化量 Δe及び$\Delta\varpi$ が存在して居たとすると、真黄経ϕ及び動径rに、次式で与えられる変化量 $\Delta\phi$及びΔrが生ずる事になる。

$$(6)\qquad \Delta\phi = 2\Delta e \sin M - 2e\Delta\varpi \cos M \quad ;$$

$$(7)\qquad \Delta r = -ae\Delta\varpi \sin M - a\Delta e \cos M \quad .$$

金星に依る真黄経ϕ及び動径rに於ける摂動$\delta\phi$及びδrは、次の形に与えられて居る。真黄経の方には、金星に依る摂動 $S_{♀}$、$C_{♀}$の他に、地球および木星に依る摂動 $S_{地球}$、$C_{地球}$および$S_{木星}$、$C_{木星}$ も存在して居るのであるが、必要無いので此処では考えない事にする。

$$(8)\qquad \delta\phi = S_{♀} \sin M + C_{♀} \cos M \quad ;$$

$$(9)\qquad \delta r = S^{※}_{♀} \sin M + C^{※}_{♀} \cos M \quad .$$

両者を合成して次を得る。

$$(10)\qquad d\phi \equiv \Delta\phi + \delta\phi = (2\Delta e + S_{♀}) \sin M - (2e\Delta\varpi - C_{♀}) \cos M \;;$$

$$(11)\qquad dr \equiv \Delta r + \delta r = -(ae\Delta\varpi - S^{※}_{♀}) \sin M - (a\Delta e - C^{※}_{♀}) \cos M \;.$$

そうして、(10)式に於ける Δe及び $\Delta\varpi$に、次の等式の成立を要求するのである。

$$(12)\qquad 2\Delta e + S_{♀} = 0 \;,\qquad 2e\Delta\varpi - C_{♀} = 0 \quad .$$

これに依って、次の表式が得られる事になる。

$$(13)\qquad d\phi = 0 \quad ;$$

$$(14)\qquad dr = -(aC_{♀}/2 - S^{※}_{♀}) \sin M + (aS_{♀}/2 + C^{※}_{♀}) \cos M \quad .$$

金星に依る真黄経ϕに於ける摂動$\delta\phi$を、上記の形で取り込むと、その皺寄せが動径rに(14)式の様に及ぶ事になる訳である。これはこれで良い。問題は無い。

3.　ところが“実際の水星の運動理論は、此の様には構築されては居ない”と見る事が出来るのである。事は仲々に微妙であって、我々の“読み取り”が的を射たものであるか否かは、改めて問われなければならないのかも知れない。問題は、Paris 天文台報・第五巻に所載の Le Verrier の主張の中に在る (Le Verrier, 1859)。

Il entre, dans l'expression des perturbations de la longitude, des termes dépendant uniquement de la longitude de Mercure même. On sait qu'on peut les négliger, pourvu qu'on ajoute au rayon certains termes dépendant du même argument (Chapitre VI, Tome II). ***Mais ces derniers termes sont insensibles, si ce n'est dans l'action de Vénus sur Mercure ; et, dans cette dernière théorie, ils se trouvent égaux et de signes contraires aux termes $-0.''011 \sin \ell$ et $-0.''003 \cos \ell$ provenant d'une autre source. Il résulte de ces considérations que les termes des perturbations qui dépendent uniquement de la longitude de Mercure peuvent être négligés soit dans la longitude, soit dans le rayon de Mercure(*).***

(*) C'est ce qui a été fait en réduisant en Tables les inégalités produites dans le mouvement de Mercure par l'action de Vénus. En calculant relatives aux inégalités produites dans la longitude par les actions de la Terre et de Jupiter, on a, par mégarde, conservé les termes en $\sin \ell$ et $\cos \ell$. Peu importe, puisque l'une et l'autre voie sont également légitimes.

上の四行は、我々が既に前頁で扱った処を述べて居るに過ぎないのであるが、続く太字で示した部分は甚だ意味深長である。水星の動径 r に於ける金星の影響：$-0.''011 \sin \ell$ 及び $-0.''003 \cos \ell$ を相殺するが如き“外からの作用”が在るとすれば、これ等の項は無視可能になると云うのである。此処に、量 ℓ は $\ell = \varpi + M$ で与えられる平均黄経を表わす。

此処の処を、我々は“彼は以下の様に扱った”と捉えたのであった (Inoue, 1992)：即ち先に、(12)式の成立を要求する事に依って、(13)式で $d\phi = 0$ を得た様に、(11)式での dr にも、(12)式に類似の等式の成立を要求して、$dr = 0$ が実現する様に図ったのであると。詰り、(11)式に於ける Δe 及び $\Delta\varpi$ に、(12)式に於けるのとは独立に次の等式の成立を課すのである。

(15)　$$a e \Delta\varpi_r - S^{※}_{♀} = 0 \quad , \quad a \Delta e_r - C^{※}_{♀} = 0 \quad .$$

これに合わせるべく、改めて(12)式を次の形に書いて置く事にする。

(16)　$$2 \Delta e_M + S_{♀} = 0 \quad , \quad 2 e \Delta\varpi_M - C_{♀} = 0 \quad .$$

此の様な事は一般には許されない。しかし“ Le Verrier は斯く扱った”と考えられる。只今の流れで捉えた結果を、端的に表わしたのが、表式群：(1)、(2)、(3)、(4)、(5)と云う訳である。これらを‘離心率’ e の一次の精度で展開すれば、先に①で示したものが得られる事になって居る。先に用いた e_M 及び e_r は次の様に与えられるとする。

(17)　$$e_M \equiv e + \Delta e_M = e - S_{♀}/2 \quad , \quad e_r \equiv e + \Delta e_r = e + C^{※}_{♀}/a \ .$$

これらを考慮しつつ、件の表式群を展開してみるならば、“妙な形で”金星の影響を取り込んだ関係式が得られる事になる。楕円軌道が表わすものでは無い事は一目瞭然。

(18)　$$\phi = \varpi + f = \varpi + M + (f - M) = \ell + 2 e_M \sin M + \cdots \quad ,$$

(19)　$$r = a(1 - e_r \cos u) = a(1 + e^2/2) - a e_r \cos M + \cdots \quad .$$

4.　Le Verrier の場合にも Newcombの場合にも真黄経に於ける周期摂動および動径に於ける周期摂動の取り扱いが、水星の運動理論の構築に際して重要な鍵を握る事になって居る。そこで、Paris 天文台報・第五巻所載の諸量を抜き出して、以下に記して置く事にする (Le Verrier, 1859)。此の中の真黄経の部分は、そっくりその儘を Clemence が引用する処となるものである (Clemence, 1943)。

惑　星	真黄経に於ける摂動　$\delta\phi$ sin ℓ の係数	cos ℓ の係数	動径に於ける摂動　δr sin ℓ の係数	cos ℓ の係数
金　星	＋0.″017	−0.″063	−0.″011	−0.″003
地　球	＋0.″005	−0.″017	＊　＊　＊	＊　＊　＊
木　星	＋0.″008	−0.″031	＊　＊　＊	＊　＊　＊

先に述べた議論では、平均近点離角 M が登場して来て居るので、関係 : $\ell=\varpi+M$ を用いて、上記の表を次の形に書き換えて置く。 Le Verrier が採用した近日点黄経ϖの値 $\varpi=75°\ 7'\ 1.''03$ を考慮する事、勿論である。

惑　星	真黄経に於ける摂動　$\delta\phi$ sin M の係数	cos M の係数	動径に於ける摂動　δr sin M の係数	cos M の係数
金　星	+0.″065 2528	+0.″000 2483	+0.″000 0740	-0.″011 4015
地　球	+0.″017 7139	+0.″000 4658	*　*　*	*　*　*
木　星	+0.″032 0147	-0.″000 2306	*　*　*	*　*　*
総　和	+0.″114 9815	+0.″000 4835	+0.″000 0740	-0.″011 4015

これに依れば、(16)式で定められるΔe_M、及び(15)式で定められるΔe_rの値が、夫々計算出来る事になる。

(20)　　$+\ 2\Delta e_M + 0.''065\ 2528 = 0$　　(dϕに於ける sin M の係数から) ,

(21)　　$-a\Delta e_r - 0.''011\ 4015 = 0$　　(d r に於ける cos M の係数から) ;

(22)　　$\Delta e_M = -\ 0.''032\ 6264$,

(23)　　$\Delta e_r = -\ 0.''029\ 4537$.

‘長半径’ aには、 Le Verrier の値 a＝0.387 0987 を代入した。‘離心率’に於ける二様の改変値間の“差” 0.″003 は、 Le Verrier の理論構築の精度からすれば無視する事は許されない。これは、 Le Verrier 流の“金星の影響の取り込みを行なったもの”は“単一の離心率を有する楕円軌道で把捉するのが困難である”と云う事を表わして居る。

既に(5)式で与えた微少量は、上記の“差”に外ならないものである。

(24)　　$\Delta\mathbb{e} \equiv e_r - e_M = \Delta e_r - \Delta e_M = 3.''17\ 2675\times10^{-3} = 1.53\ 8156\times10^{-8}$.

これが、一世紀当り43秒角“後退する楕円”を与える“源”であった (Inoue, 1992)。

5． 水星の運動理論樹立に際して、Newcomb は Le Verrier とは少しく異なる取り扱いをする。しかし、 Le Verrier の結果を追認する形で、近日点黄経に於ける余剰前進量を同じ様に見い出して居るのである (Chebotarev,1967)。その理由を以下で見て行く。

先ずは、Newcomb が如何様に扱ったかを見る目的で、 Clemence 所論の水星運動理論から次の記述を引用して置く (Clemence,1943)。

We now consider the eccentricities and longitudes of the perihelia. Here the situation is complicated by the existence of perturbations of the longitudes having the same periods as the mean anomalies, which therefore are easily confounded with the elliptic elements.

…………………………………………

In Leverrier's theory of Mercury (*Annales de l'Observatoire de Paris*, Vol. V), there are three perturbations of the class mentioned. These are :

Action of Venus,	$+0.''017 \sin \ell - 0.''063 \cos \ell$,
Action of the Earth,	$+0.''005 \sin \ell - 0.''017 \cos \ell$,
Action of Jupiter,	$+0.''008 \sin \ell - 0.''031 \cos \ell$,

where ℓ is the mean ecliptic longitude of Mercury. **Newcomb, supposing that these terms had been included in the Tables as perturbations of the longitude, and wishing to include them in the elliptic elements, took their sum (*A.C.* p.180) and converted it into corrections to the eccentricities and perihelion, obtaining $\delta e=+0.''058$, $\delta\pi=0.''0$.** In fact, however, Leverrier included only the last two of the terms mentioned in his tables of the perturbations. He says (*op.cit.*, p.16), "En calculant les Tables relatives aux inégalités produites dans la longitude par les actions de la Terre et de Jupiter, on a, par mégarde, conservé les termes en sin ℓ et cos ℓ".

Changing the argument of the perturbation due to the action of Venus to *g*, the mean anomaly, we have $+0.''066 \sin g + 0.''000 \cos g$, which gives $\delta e=+0.''033$, $\delta\pi=0.''0$.

…………………………………………

ここで、 Clemence が $\delta\pi$ 及び g と表記したものは、近日点黄経に対する改変量 $\Delta\varpi$ 及び平均近点離角 M を表わす。これで明らかなる如く、 Le Verrier が水星の真黄経 ϕ 及び動径 r に於ける金星に依る摂動 : $S_{♀}$ 、$C_{♀}$ 及び $S^{*}_{♀}$ 、$C^{*}_{♀}$ を考慮して“離心率の値を変えた”のに対して、Newcomb は、動径に於ける摂動は一切考えずして、真黄経に於ける金星・地球・木星に依る摂動 : $S_{♀}$ 、$S_{地球}$、$S_{木星}$ を、“水星の離心率に加え合わせる”と云う方法を採って居る。詰り、Newcomb は、離心率の値が少しだけ異なる楕円軌道で以て当該摂動を内包した運動理論が構築出来ると考えた訳である。 Clemence が、金星のみの影響を考慮して、離心率に於ける改変量を $\delta e=+0.''033$ としたのに対して、Newcomb はこれを $\boldsymbol{\delta e=+0.''058}$ として居るのである。

当然ながら、Newcomb は、 Le Verrier が用いた軌道が有するものとは、数量的に異なる値を有する軌道を採用した事になる。これに依る影響が、どの様な形で現われ、どの様に処理され得るかを見て行く事にしよう。両者を区別する目的で、脚符「L」及び「N」を夫々「Le Verrier」及び「Newcomb」の意味で用いる事にする。 Le Verrier が用いた楕円軌道の離心率を e_L と表記する時、Newcomb のそれ e_N は次の様であると考えられる。

$$(25) \qquad e_N = e_L + S/2 \ , \qquad (S \equiv S_{♀} + S_{地球} + S_{木星}) \ .$$

この事に付いては、Newcomb が採用した水星の質量に関連させて議論する必要がある。

彼は、 Le Verrier が水星の質量 $m_{水星}$ を太陽質量 $m_{太陽}$ の三百万分の一としたのに対し六百万分の一として居るのである (Chebotarev, 1967)。質量が変ると平均運動が変る事になる。それでは、Newcomb の運動把捉は、 Le Verrier のそれと大きく異なって居るのであろうか？

平均運動　　n　　:

(26)　　$n_N = \sqrt{\mu_N / a_N^3}$　　,　　$\mu_N \equiv G(m_{太陽} + m_{水星N})$　　;

(27)　　$n_L = \sqrt{\mu_L / a_L^3}$　　,　　$\mu_L \equiv G(m_{太陽} + m_{水星L})$　　.

質量比　$m_{水星} / m_{太陽}$　:

(28)　　$m_{水星N} / m_{太陽} = (1/6) \times 10^{-6}$　　,

(29)　　$m_{水星L} / m_{太陽} = (1/3) \times 10^{-6}$　　.

ここで、平均黄経 ℓ に、$\ell_N \neq \ell_L$ の如き不一致が生じたのでは、水星の運動把捉上に大きな支障を来たすこと必定なので、これは回避する事にする。従って、次を要求する。

(30)　　$n_N \equiv n_L$　　.

これは、長半径 a に、次の関係を要求する事になる。

(31)　　$a_N / a_L = (\mu_N / \mu_L)^{1/3} \fallingdotseq \{1 - m_{水星L} / (2 m_{太陽})\}^{1/3} \fallingdotseq 1 - 5.55 \times 10^{-8}$　　.

我々は、此処の処を以下の様に捉える事で“納得”する事にした。

平均近点離角に依る、動径の平均値 $a(1 + e^2/2)$ に着目する。先の(25)式に於ける量 : $S/2 = 0.''058$ は約 2.81×10^{-7} に相当するので、次の様な計算が出来る事になる。

(32)
$$
\begin{aligned}
a_N(1 + e_N^2/2) &= \{(1 - 5.55 \times 10^{-8}) a_L\} \times \{1 + (e_L + 2.81 \times 10^{-7})^2/2\} = \\
&\fallingdotseq (1 - 5.55 \times 10^{-8}) \times (1 + 5.66 \times 10^{-8}) a_L (1 + e_L^2/2) = \\
&\fallingdotseq (1 + 0.11 \times 10^{-8}) \times a_L (1 + e_L^2/2) = \\
&\fallingdotseq a_L (1 + e_L^2/2) \quad .
\end{aligned}
$$

これは、水星軌道の離心率の改変、及び水星質量の改変に依っても、平均運動にも動径の平均値にも何らの変化も生じさせない事を表わすものである。我々が、“納得”する事にした所以のものが此処に存する。但し、水星の離心率として $e_L = 0.2056105$ を用いた。

Newcomb の楕円軌道を、 Le Verrier のそれと比較してみるならば、離心率 e_L を e_N に変えたのに対応させて、質量 $m_{水星L}$ を $m_{水星N}$ に変え、長半径 a_L も a_N に変えたと見る事が出来る。量 : a_L、e_L ; $m_{水星L}$ は、 Le Verrier の、摂動を考えに入れる前の軌道、楕円軌道を記述するものである。従って、量 : a_N、e_N ; $m_{水星N}$ は、摂動を考えに入れる前の、Newcomb の楕円軌道を記述するものである、と見做す事が出来る。

6.　此の段階での Newcomb軌道には、未だ $S_{♀}$、$S_{地球}$、$S_{木星}$および$C^{※}_{♀}$に関連した摂動が“真黄経および動径に考慮されなければならないものとして残って居る”のである。先で Newcomb は、$S_{♀}$ 、$S_{地球}$、$S_{木星}$に依る摂動の、総てを取り込んだ事になって居るが、我々は中心差の方に取り込まれて居るのは、此の中の $S_{♀}$のみであると捉える。そうして、残る $S_{地球}$ 、$S_{木星}$に依る摂動は、正しく摂動計算の手法に従って計算されるべきであると考えて居る。量 S を取り込んだ事で、“Newcomb の運動理論は、これらに依る摂動計算は総てした事になって居るとする捉え方はしない”とは上で述べた処である。Newcomb は、此の $S_{地球}$、$S_{木星}$ に依る摂動は、計算しては居ないのである。

上の離心率 e_Lに、量 $S_{\text{♀}}/2$を加える形で、真黄経ϕに於ける金星に依る摂動を取り込む事を考える。従って、中心差：$f-M$ の計算に、此の e を用いる事になる。

(33) $$e \equiv e_L + S_{\text{♀}}/2 \quad .$$

只今の扱いに依って、当然の事ながら、動径：$r = a(1- e_L \cos u)$ に影響が及ぶ。動径 r に於ける金星に依る摂動 $C^{※}_{\text{♀}}$ の取り込みも同時に考える事にすれば、以下の様になるであろう。

(34) $$\begin{aligned} r + \delta r &= a\{1-(e - S_{\text{♀}}/2)\cos u\} + C^{※}_{\text{♀}} \cos M = \\ &\fallingdotseq a(1- e \cos u) + (a S_{\text{♀}}/2 + C^{※}_{\text{♀}}) \cos M \quad . \end{aligned}$$

ここで、(17)式および(24)式から、次の表記の可能なる事を知る。

(35) $$\Delta e = S_{\text{♀}}/2 + C^{※}_{\text{♀}}/a$$

従って、動径 r が、次の形に表わされ得るのが知れる。

(36) $$r + \delta r \fallingdotseq a\{1-(e - \Delta e)\cos u\} \quad .$$

此の量 $a\Delta e \cos u$ を、Newcomb は計算しては居ないのである。上記の量 $e - \Delta e$ の処が、Le Verrier の場合は $e + \Delta e$ となって居た。その場合は、一世紀当り43秒角の“後退”が、近日点黄経ϖに現われるのであった。従って、Δe の存在を考慮しなかった Newcomb の場合には、一世紀当り43秒角の“前進”が欠如する事になる訳である。これが「観測」と「理論」との間に、Newcomb の場合に、“43秒角 /世紀”の食い違いを生ずる事になった原因なのである。

ところで、地球および木星に依る摂動 $S_{\text{地球}}$、$S_{\text{木星}}$ はどうなるのであろう？　此処の処を彼の Le Verrier は、正しく計算して居るので、彼の場合には問題は無い。Newcomb はと言えば、計算しては居ないのである。これらの量の存否は、近日点黄経ϖの永年変化には無関係なのである。更に、本節の此処までの議論では、摂動 $C_{\text{♀}}$、$S^{※}_{\text{♀}}$；$C_{\text{地球}}$、$C_{\text{木星}}$ に関して、一切触れないで来た。それは、第４節の表で明らかな様に、何れもが無視可能な微小量である為に、取り上げる必要が無かったからである。

金星の影響を正しく取り込んだ系を表現する目的で、次の『中間軌道』の導入を図る事にする。

(37) $$u - e \sin u = M \quad , \qquad M = \int_{t_0}^{t} n\, dt + \chi \quad ;$$

(38) $$n \equiv \sqrt{\mu_N / a_N^3} \quad , \qquad \mu_N = G(m_{\text{太陽}} + m_{\text{水星N}}) \quad ;$$

(39) $$\tan(f/2) = \sqrt{(1+e^*)/(1-e^*)} \cdot \tan(u/2) \quad ;$$

(40) $$e^* \equiv e + \Delta E \quad , \qquad \Delta E \equiv S_{\text{地球}} + S_{\text{木星}} \quad .$$

(41) $$r = a_N\{1-(e - \Delta e)\cos u\} \quad ,$$

(42) $$\phi = \varpi + f \quad ;$$

(43) $$p_r = n a_N (e - \Delta e) \sin u / (1 - e \cos u) \quad ,$$

(44) $$p_\phi = n r^2 \sin f / \{\sin u (1 - e \cos u)\} \quad .$$

先に Le Verrier の場合に見た（井上､1998)のと同様にして、以下、此の『中間軌道』に着目して、我々の見方を開陳して行く事にする。

7． 只今の『中間軌道』の系は、次の形の「エネルギー積分」を有する。

(45) $$H \equiv -\mu_N/(2a_N) = (p_r{}^2 + p_\phi{}^2/r^2)/2 - \{\mu_N/r + \varepsilon R_N\} \quad ,$$

(46) $$\varepsilon R_N \equiv \mu_N(\Delta e/e)\cdot\{1/a - 3/r + a/r^2 + a^2(1-e^2)/r^3\} + \\ + \mu_N(\Delta E/e)\cdot\{-a/r^2 + a^2(1-e^2)/r^3\} \quad .$$

量 H を Hamilton 函数であるとして、以下の形の運動方程式を書き出して置く。

(47) $$dr/dt = \partial H/\partial p_r = \quad p_r \quad - \partial\,\varepsilon R_N/\partial p_r \quad ,$$

(48) $$d\phi/dt = \partial H/\partial p_\phi = p_\phi/r^2 - \partial\,\varepsilon R_N/\partial p_\phi \quad ;$$

(49) $$dp_r/dt = -\partial H/\partial r = p_\phi{}^2/r^3 - \mu_N/r^2 + \partial\,\varepsilon R_N/\partial r \quad ,$$

(50) $$dp_\phi/dt = -\partial H/\partial \phi = \quad 0 \quad + \partial\,\varepsilon R_N/\partial \phi \quad .$$

此の系を、要素変化の方法で近似的に解く事を考える。そこで、我々の言う『人工系』の導入を図る（井上、1995）。次の「二体問題の系」を、これに充てる事にする。外でもない Le Verrierや Newcombと同じ土俵で論じたいが為である。彼らは、水星の太陽面通過観測の整約を楕円要素で以て為し、件の余剰の永年変化を見い出したのであったからである。

(51) $$dr^\star/dt = \quad p_r{}^\star \quad ,$$

(52) $$d\phi^\star/dt = p_\phi{}^\star/r^{\star 2} \quad ;$$

(53) $$dp_r{}^\star/dt = p_\phi{}^{\star 2}/r^{\star 3} - \mu_N/r^{\star 2} \quad ,$$

(54) $$dp_\phi{}^\star/dt = \quad 0 \quad .$$

一見、煩瑣ではあるが、飽く迄も『人工系』である事を強調する目的で、「* 印」を付す事にした。此の系を満たす積分定数である楕円要素を、c_1、c_2 ； c_3、c_4 と表記する事にして、「二体問題の系の解表式」を以下の表記で表わすものとする。『中間軌道』を記述する為に導入された定数 ：a_N 、e ； ϖ、χ は、断じて、只今の楕円要素と混同する様な事はあってはならない。要注意事項である。

(55) $$r^\star = \Phi_r(c_1, c_2\ ; c_3, c_4\ ; t) \quad ,$$

(56) $$\phi^\star = \Phi_\phi(c_1, c_2\ ; c_3, c_4\ ; t) \quad ;$$

(57) $$p_r{}^\star = \Psi_r(c_1, c_2\ ; c_3, c_4\ ; t) \quad ,$$

(58) $$p_\phi{}^\star = \Psi_\phi(c_1, c_2\ ; c_3, c_4\ ; t) \quad .$$

斯くして、「変数変換の式」及び「新変数」を、次の「対応関係」で設定すれば、我々の言う『人工系の方法』の適用は完成する。

(59) $$(r^\star, \phi^\star\ ;\ p_r{}^\star, p_\phi{}^\star) \longrightarrow (r\ , \phi\ ;\ p_r, p_\phi) \quad ,$$

(60) $$(c_1, c_2\ ;\ c_3\ , c_4) \longrightarrow (\zeta_1, \zeta_2\ ;\ \zeta_3, \zeta_4) \quad .$$

ここで、量（$\zeta_1, \zeta_2\ ; \zeta_3, \zeta_4$）が、初発の系の変数（$r, \phi\ ;\ p_r, p_\phi$）に取って代るべき「新変数」に外ならないものである。従って、新旧の両変数を結び付けるものとして次の関係式が登場して来る事になる。

(61) $$r = \Phi_r(\zeta_1, \zeta_2 ; \zeta_3, \zeta_4 ; t) ,$$

(62) $$\phi = \Phi_\phi(\zeta_1, \zeta_2 ; \zeta_3, \zeta_4 ; t) ;$$

(63) $$p_r = \Psi_r(\zeta_1, \zeta_2 ; \zeta_3, \zeta_4 ; t) ,$$

(64) $$p_\phi = \Psi_\phi(\zeta_1, \zeta_2 ; \zeta_3, \zeta_4 ; t) .$$

新しい変数、楕円要素（$\zeta_1, \zeta_2 ; \zeta_3, \zeta_4$）に対する微分方程式系は、次で与えられる。

(65) $$d\zeta_k/dt = \sum_{j=1}^{4} \{\zeta_j, \zeta_k\} \partial \varepsilon R_N^{\spadesuit}/\partial \zeta_j \quad , \quad (k=1,2,3,4) \quad ;$$

(66) $$\varepsilon R_N^{\spadesuit} = \varepsilon R_N^{\spadesuit}(\zeta_1, \zeta_2 ; \zeta_3, \zeta_4 ; t) =$$
$$= \varepsilon R_N (r, \phi ; p_r, p_\phi) =$$
$$= \mu_N(\boldsymbol{\Delta e}/e)\{1/a - 3/r + a/r^2 + a^2(1-e^2)/r^3\} +$$
$$+ \mu_N(\Delta E/e)\{-a/r^2 + a^2(1-e^2)/r^3\} \quad .$$

表記 $\{\zeta_j, \zeta_k\}$, ($j,k=1,2,3,4$) は、Poisson 括弧を表わす。

8．　楕円要素（$\zeta_1, \zeta_2 ; \zeta_3, \zeta_4$）と言っても、これでは判り難いので、通常の表記を用いたい処であるが、混同は避けなければならないので、表記 : $a^{\spadesuit}$、$e^{\spadesuit}$; $\varpi^{\spadesuit}$、$\chi^{\spadesuit}$ で以て書き分ける事にする。特別の関心があるのは、近日点黄経 $\varpi^{\spadesuit}$に於ける永年変化である。そこで、上の摂動函数 $\varepsilon R_N^{\spadesuit}$ の永年部 $\varepsilon R_N^{\spadesuit}{}_{(s)}$ を抽出して、その変化を見てみる事にする。

(67) $$\varepsilon R_N^{\spadesuit}{}_{(s)} = \mu_N(\boldsymbol{\Delta e}/e^{\spadesuit})\{-2/a^{\spadesuit} + 2/(a^{\spadesuit}\eta^{\spadesuit})\} +$$
$$+ \mu_N(\Delta E/e^{\spadesuit}) \times 0 \quad ;$$

(68) $$\eta^{\spadesuit} \equiv \sqrt{\{1-e^{\spadesuit 2}\}} \quad , \quad n^{\spadesuit} \equiv \sqrt{\{\mu_N/a^{\spadesuit 3}\}} \quad .$$

(69) $$d\varpi^{\spadesuit}{}_{(s)}/dt = \{\eta^{\spadesuit}/(n^{\spadesuit} a^{\spadesuit 2} e^{\spadesuit})\} \partial \varepsilon R_N^{\spadesuit}{}_{(s)}/\partial e^{\spadesuit} =$$
$$= + (\boldsymbol{\Delta e}/e^{\spadesuit})\{2/(1+\eta^{\spadesuit})\}\{1/\eta^{\spadesuit} + (e^{\spadesuit}/\eta^{\spadesuit})^2\} n^{\spadesuit} .$$

(70) $$\delta\varpi^{\spadesuit}{}_{(s)} \equiv \int_{t0}^{t} \{d\varpi^{\spadesuit}{}_{(s)}/dt\} \times dt =$$
$$= (\boldsymbol{\Delta e}/e^{\spadesuit})\{2/(1+\eta^{\spadesuit})\}\{1/\eta^{\spadesuit} + (e^{\spadesuit}/\eta^{\spadesuit})^2\} \times (M^{\spadesuit} - \chi^{\spadesuit}) .$$

これに、Newcomb の場合の数値として : $e^{\spadesuit} = e_L + S/2 = 0.205\ 6105 + 0.000\ 0002\ 8$ を用いる事にすれば、次の大きさの近日点黄経の永年変化 $\delta\varpi^{\spadesuit}{}_{(s)}$ が求められる。

(71) $$\delta\varpi^{\spadesuit}{}_{(s)} = +8.060\ 5728 \times 10^{-8} \times (M^{\spadesuit} - \chi^{\spadesuit}) \quad ,$$

(72) $$\delta\varpi^{\spadesuit}{}_{(s)} : +43.374\ 8296 \text{秒角/世紀} \quad .$$

ここで、地球および水星の公転周期として、 Le Verrier の数値 : 365.25 63744 および 87.96 92580 を用いた (Le Verrier, 1856)。

先に Le Verrier の取り扱いを、『中間軌道』把捉で以て論じ、余剰前進の問題に決着を付ける事を試みた (井上、1998)。本小論の表式群 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) が、それであるが、これを、金星の影響を正しく取り込んだ系 : (37)、(38)、(39)、(40)、(41)、(42)、(43)、(44) の表式群に呼応させた形に書いて置く事にしよう。

$$u - e_L \sin u = M \;, \qquad M = \int_{t_0}^{t} n\,dt + \chi \;; \tag{73}$$

$$n \equiv \sqrt{\{\mu_L / a_L^3\}} \;, \qquad \mu_L = G(m_{\text{太陽}} + m_{\text{水星L}}) \;; \tag{74}$$

$$\tan(f/2) = \sqrt{\{(1+e_L)/(1-e_L)\}} \cdot \tan(u/2) \;; \tag{75}$$

$$r = a_L\{1 - (e_L + \Delta e) \cos u\} \;, \tag{76}$$

$$\phi = \varpi + f \;; \tag{77}$$

$$p_r = n a_L (e_L + \Delta e) \sin u / (1 - e_L \cos u) \;, \tag{78}$$

$$p_\phi = n r^2 \sin f / \{\sin u (1 - e_L \cos u)\} \;. \tag{79}$$

此の系に対する「エネルギー積分」は、次の形を取る。

$$H \equiv -\mu_L/(2a_L) = (p_r^2 + p_\phi^2/r^2)/2 - \{\mu_L/r + \varepsilon R_L\} \;, \tag{80}$$

$$\varepsilon R_L \equiv \mu_L(\Delta e / e_L) \cdot \{-1/a_L + 3/r - a_L/r^2 - a_L p_L / r^3\} \;; \tag{81}$$

$$p_L \equiv a_L \eta_L^2 \;, \qquad \eta_L \equiv \sqrt{\{1 - e_L^2\}} \;. \tag{82}$$

此の場合にも、「二体問題の系」を『人工系』に選び、摂動函数 $\varepsilon R_L^{\heartsuit}$ の永年部を抽出し近日点黄経 $\varpi^{\heartsuit}$ の永年的な振舞いに付いて調べる事が出来るのであった (井上、1998)。

$$\varepsilon R_{L(s)}^{\heartsuit} \equiv \mu_L(\Delta e / e^{\heartsuit})\{2/a^{\heartsuit} - 2/(a^{\heartsuit}\eta^{\heartsuit})\} \;; \tag{83}$$

$$\delta\varpi^{\heartsuit}_{(s)} = -(\Delta e / e^{\heartsuit})\{2/(1+\eta^{\heartsuit})\}\{1/\eta^{\heartsuit} + (e^{\heartsuit}/\eta^{\heartsuit})^2\} \times (M^{\heartsuit} - \chi^{\heartsuit}) \;. \tag{84}$$

只今の Le Verrier の場合には、その大きさは、Newcomb の場合のに一致するのであるが符号が逆になって“後退”する事になって居るのであった (Inoue, 1992)。

$$\delta\varpi^{\heartsuit}_{(s)} : -43.374\ 8962 \text{ 秒角/世紀} \;. \tag{85}$$

そこで、我々の理解する処を、以下の様に整理して置く。

☆ Le Verrier は、“金星の摂動”を、中心差用の離心率 e_M と動径用の離心率 e_r の二個を、別々に用いる事で達成し得ると考えた。此の様な扱いをすると、43秒角だけ後退する軌道となって仕舞うのである。彼はその事に思い至らず、「楕円軌道で計算して居る」と思い込んで居たのである。
彼の理論が「如何に精緻なものであった」としても、此の様な「勘違い」をして居たのでは、観測を説明する事も不可能であったと言う訳である。

☆ Newcomb は、“金星・地球・木星に依る摂動”を、水星の離心率を改変した単一の楕円軌道で以て把捉可能であると考えた。しかし、これだけでは不充分なのである。金星に依る、動径に於ける摂動量を計算しなければ、水星の運動を正しく捉える事は出来ないのである。真黄経および動径への摂動が両者相俟って、43秒角だけ前進する軌道を与えるのである。これが正しい運動の姿であるのに、Newcomb は、これを計算しては居ないのである。それ故に、43秒角不足すると云う事態が発生したのである。

９.　我々は、「Newcomb の扱い」が齎らす処のものを、一つの『中間軌道』で以て把捉する事を試みた。果たして、我々の期待通りのものが、此の『中間軌道』に盛られて居るであろうか？　先の (37)、(38)、(39)、(40)、(41)、(42) 式を展開、近似表式を導き、これを確かめて置く事にしよう。以下に、単純計算：

◎　$u = M + e \sin u \fallingdotseq M + e \sin M + (e^2/2) \sin 2M$　,

◎　$\cos u \fallingdotseq \cos (M + e \sin M) \fallingdotseq -e/2 + \cos M + (e/2) \cos 2M$　,

◎　$r = a_N\{1 - (e - \Delta e) \cos u\} = a_N(1 - e \cos u) +$

$+ a_N \Delta e \cos u \fallingdotseq a_N(1 - e \cos u) + a_N \Delta e \cos M$　;

此処で　$\Delta e = S_{♀}/2 + C^{※}_{♀}/a$　であった。

◉動径　$r \fallingdotseq a_N(1 - e \cos u) + a_N(S_{♀}/2 + C^{※}_{♀}/a) \cos M$　.

◎　$f \fallingdotseq u + e^* \sin u + (e^{*2}/4) \sin 2u =$

$\fallingdotseq \{M + e \sin M + (e^2/2) \sin 2M\} +$

$+ e^*\{\sin M + (e/2) \sin 2M\} + (e^{*2}/4) \sin 2M =$

$= M + (e + e^*) \sin M + \{(e^2/2) + (e^* e/2) + (e^{*2}/4)\} \sin 2M$　;

此処で　$e^* = e + (S_{地球} + S_{木星})$　であった。

◉中心差　$f - M \fallingdotseq \{2e + (S_{地球} + S_{木星})\} \sin M + \{(5e^2/4) + e\Delta E\} \sin 2M$　.

これは、 sin M の係数を $2 \times \{e + (S_{地球} + S_{木星})/2\}$ と書いてみれば明らかな様に、地球及び木星の影響を離心率 e に取り込んだ事を表わして居る。それ故に、Newcomb の取り扱いが齎らす処のものを、余す処無く表現し得る事を、我々の『中間軌道』把捉は教えて呉れて居る。

断って置くが、上記の動径 r に対する表式中、$a_N(S_{♀}/2 + C^{※}_{♀}/a) \cos M$ なる項を Newcomb は、計算しては居ないのである。我々の『中間軌道』は、計算すべき処の式群を手際良く、表現して居るのである。

１０. 斯くして、次の事が明らかとなった。

(甲) 金星に依る影響を正しく計算して、水星の位置予報を行なえば理論と観測との間には、如何なる食い違いも生ずる事は無い。

(乙) 未知惑星存在の仮定も不要なら、引力法則の改変も不要である。

２００６年４月６日（木）に修正加筆した。

(00506S)

参考文献

1. Chebotarev, G. A. : 1967, *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, Elsevier Publishing Company, INC.

2. Clemence, G. M. : 1943, *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, XI.

3. Einstein, A. : 1915, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 47.

4. Inoue, T. : 1992, *Proceedings of the Twenty-Fifth Symposium on Celestial Mechanics*.

5. 井上　猛 : 1995, 第２７回天体力学研究会集録.

6. 井上　猛 : 1998, 第３０回天体力学研究会集録.

7. Le Verrier, U. J. : 1856, *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris*, II.

8. Le Verrier, U. J. : 1859, *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris*, V.

9. Newcomb, S. : 1895, *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, VI.