「水星中間軌道」の有効性

Usefulness of " the Intermediary Orbit" for cleaning up the problem of the excess advance in the longitude of the perihelion of Mercury

井上　猛　（京都産業大学）
T. Inoue
Kyoto Sangyo　University

Abstract. With the aid of the idea of an intermediary orbit, we were well able to reveal the true reason for the appearance of the excess secular advance in the longitude of the perihelion of Mercury (Inoue, 1992). In traditional treatments, one includes a portion of planetary perturbations in the elliptic orbit. This technic modifies a fixed elliptic orbit to a moving one. If one takes this circumstances into accout for the theory of motion of Mercury due to Le Verrier, one does not need to add 43″/century for the longitude of the perihelion. This means that his theory was one of perfectly established ones (Inoue, 1994).

１．「水星近日点黄経に於ける余剰の前進運動 $\delta\varpi_{(s)}$」の存在が Le Verrier の研究に端を発して居ると云う事に異を唱える者は居ないであろう。彼が建設した水星の運動理論及び彼が用いた観測データの両方が今日でも通用するものである事は既に立証済みである（井上、1991）。しかしその直後に彼の運動理論の建設過程に『余剰運動 $\delta\varpi_{(s)}$ 発生の秘密が潜んで居る』のが判明したのであった（Inoue, 1992）。

Le Verrier の運動理論は、次の平均要素で与えられる楕円軌道から出発する（1859）。ここで、t は 1850年 1月 1日の正午を起点に年単位で計ったものを表わす。頁を表わす以下の数字は、Ｐａｒｉｓ天文台報第Ｖ巻（１８５９年）のものである。

$a = 0.387\ 0987$	(p. 23)
$e = 0.205\ 6105 + 0.''041\ 95t - 0.''000\ 0009t^2$	(p. 21)
$i = 7°\ 0'\ 8.''16 + 0.''063\ 14t - 0.''000\ 0056t^2$	(p. 20)
$\Omega = 46°\ 33'\ 3.''25 + 42.''643\ 0\ t + 0.''000\ 0835\ t^2$	(p. 20)
$\varpi = 75°\ 7'\ 1.''03 + 55.''530\ 8\ t + 0.''000\ 1111\ t^2$	(p. 21)
$\ell = 327°\ 15'19.''89 + 538\ 1066.''441\ 00t + 0.''000\ 11289t^2$	(p. 21)

これに金星から海王星迄の諸惑星に依る摂動を考慮して、先ずは申し分の無い運動理論が完成する。ところが、水星の場合には極めて高い精度の太陽面通過現象の観測が使える。これを用いて要素改良を試みた結果は、上記の値の殆どが改変されなければならない事になったのであった。 Le Verrier に依る改変量は以下の如し（p. 96）。

$$\delta a = 0$$
$$\delta e = -1.''18$$
$$\delta i = -0.''45$$

$$\delta\Omega = +5.''5$$
$$\delta\varpi = +12.''90 + 0.''383\ t$$
$$\delta\ell = +0.''54 + 0.''103\ 9t$$

以上の諸補正を施す事に依り漸くにして、Le Verrierは水星の運動理論の完成を見る事が出来たのであった（p. 107, p. 108）。

$$
\begin{aligned}
a &= 0.387\ 0987\\
e &= 0.205\ 60478 + 0.''041\ 95t - 0.''000\ 0009t^2\\
i &= 7^\circ\ 0'\ 7.''71 + 0.''063\ 14t - 0.''000\ 0056t^2\\
\\
\Omega &= 46^\circ\ 33'\ 8.''75 + 42.''643\ 0\ t + 0.''000\ 0835\ t^2\\
\varpi &= 75^\circ\ 7'13.''93 + 55.''913\ 8\ t + 0.''000\ 1111\ t^2\\
\ell &= 327^\circ\ 15'20.''43 + 538\ 1066.''544\ 9\ t + 0.''000\ 11289t^2
\end{aligned}
$$

しかし、上記 $\delta\varpi$ 中の時間 tに比例する項 $\delta\varpi_{(s)} \equiv 0.''383$/年 の出現は、惑星運動理論に新たな難題を提出する事になった。即ち“Ｎｅｗｔｏｎ力学で説明不可能な余剰の前進量 : 43 秒角/世紀 ”として広く知られる様になったのは周知の通りである。

２．先ずは、「文字表記約束」の目的で、二体問題の解表式を次の形に書き出して置く。

(1) $$M = u - e \sin u = \ell - \varpi\ ,$$

(2) $$\tan (f/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \cdot \tan (u/2)\ ;$$

(3) $$r = a\,(1 - e \cos u)\ ,$$

(4) $$\phi = \varpi + f\ .$$

ここで、量ａ、ｅ及びϖは、長半径、離心率および近日点黄経を、またM、ｕおよびｆは平均近点離角、離心近点離角および真近点離角を表わすものとする。ℓは平均黄経を、ｒ及びϕは夫々、動径および真黄経を表わすものとする。

Le Verrierの場合、これらの式群を其の儘に計算するのでは無くして、伝統的な手法に則って平均近点離角 M の正弦・余弦に依る展開表式に訴えるのである（p. 22, p. 23）。

(5) 中心差： $$f - M = (84\ 376.''212 + 0.''082\ 59t)\sin M + \cdots\cdots$$

(6) 動　径： $$r = 0.395\ 281\ 13 + 0.000\ 000\ 016\ 2t + -(0.078\ 333\ 47 - 0.000\ 000\ 075\ 0t)\cos M + \cdots\cdots$$

中心差の方は、先の離心率の値 0.205 6105 + 0.″041 95tの採用で、上記 sin M の係数 84 376.″211 9 + 0.″082 589t を直ちに導く事が出来るので問題は無い。しかし、動径の方は cos M の係数が 0.078 333 461 - 0.000 000 075 0t となって、末位で１ほど合わない。我々は、これを‘単なるミスとして看過する事はせずして其れなりの理由が必ずや何処かに潜んで居るに違いない’と考えて、其の原因究明に努めて来た。

我々の Le Verrier の研究追試の動機は、どちらかと言えば‘不純なもの’であった。卓抜した洞察力と抜群の計算力が“あの海王星発見の快挙を成し遂げさせた”と云うのは万人の認める処である。これは、言ってみれば太陽系の最遠側に‘惑星を創った’と云う事である。そうした時に、大いなる野心家が次に考える事は‘太陽系の最近側に惑星を創る事’である。水星の運動に不等性を残存させ、それが未知の惑星に起因するものであるとして‘発見’を促せば、その野望が満たされる様な事が起らないとも限らないではないか？「余りにも穿ち過ぎ」等と言う勿れ。此の人物、自分が発見に導いた‘あの海王星を一度も望遠鏡で覗こうとはしなかった’と云うではないか（Flammarion, 1880）！‘益々以て怪しい’と思ったとしても、強ち見当外れでは無いであろう。しかし、この様な‘偏見’も、虚心にＰａｒｉｓ天文台報を見て行くうちに、‘手の内の総てを見せる’と云うオープンな研究態度に気付くに及び、彼に対する見方も大きく変って行ったのであった。

水星の真黄経 ϕ 及び動径 r に対する他の惑星に依る多種多様な摂動の中には、先の展開表式（5)、(6) に於けるのと同じ sin M、cos M に比例する項が存在して居る。Le Verrierは、金星、地球および木星に依るものが特に大であるとして、以下の様に掲げて居る（p.13, p.14, p.15)。

惑　星	真黄経に於ける摂動 $\delta\phi$ sin ℓ の係数	cos ℓ の係数	動径に於ける摂動 δ r sin ℓ の係数	cos ℓ の係数
金　星	＋0.″017	−0.″063	−0.″011	−0.″003
地　球	＋0.″005	−0.″017	＊　＊　＊	＊　＊　＊
木　星	＋0.″008	−0.″031	＊　＊　＊	＊　＊　＊

ここで $\ell=\varpi+M$ であるから、$\varpi=75°\ 7'\ 1.''03$ を考慮する時は、上記の表を次の形に書き換える事が出来る。

惑　星	真黄経に於ける摂動 $\delta\phi$ sin M の係数	cos M の係数	動径に於ける摂動 δ r sin M の係数	cos M の係数
金　星	+0.″065 2528	+0.″000 2483	+0.″000 0740	-0.″011 4015
地　球	+0.″017 7139	+0.″000 4658	＊　＊　＊	＊　＊　＊
木　星	+0.″032 0147	-0.″000 2306	＊　＊　＊	＊　＊　＊
総　和	+0.″114 9815	+0.″000 4835	+0.″000 0740	-0.″011 4015

Newcomb は、此の種の摂動は二体問題の解の展開表式と分離困難であるとして、上記の量を、初発の軌道要素の中に吸収させる事を考えた。真黄経に於ける、金星、地球および木星に依るものの総和 +0.″114 9815 を sin M の主要係数 2e の修正分 $2\Delta e$ に等しいと置いて、$\Delta e=0.''058$ を初発の離心率に加え、同じく総和 +0.″000 4835 を cos M の係数に於ける修正分 $-2e\Delta\varpi$ と等置して $\Delta\varpi=0.''0$ として居る（Clemence, 1943)。

同じ様な事は、既に、Le Verrierに依っても為されて居るのである。彼は、金星に依るものだけを水星の軌道要素の中に吸収させようとし、地球および木星に依る摂動はその儘の形で残して置いたのである。この時、金星に依るものの取り込み方に問題があったのである。金星の場合には、真黄経のみならず動径の方にも摂動がある。これを、次の等式を要求する事に依って、相殺させる様にしたのである（p.16)。

$$(7)\qquad +2\Delta e_M + 0.''065\ 2528 = 0 \qquad (\delta\phi\text{に於ける sin M の係数から})$$

$$(8)\qquad -a\,\Delta e_r - 0.''011\ 4015 = 0 \qquad (\delta r\text{に於ける cos M の係数から})$$

単一で有るべき離心率に対する修正が、二様に為されなければならない事になって来た。

$$(9)\qquad \Delta e_M = -0.''032\ 6264$$

$$(10)\qquad \Delta e_r = -0.''029\ 4537$$

両者の差は僅少であるが 0.″003 の大きさは、Le Verrier の理論構築の精度からすれば無視するのは許されない事である（p.12)。

3．Le Verrierの研究結果を追試し批判して行く過程で『二個の離心率を持った軌道』のアイディアに到達したのであった。そうした時に、次の二つの表式に出逢ったのであった（Brumberg, 1991）。表記の一部は、我々流に書き換える。

$$\delta\varpi_{(s)} = 2\pi m\,(2\gamma + 2 - \beta)/\{a(1 - e^2)\} \qquad (3.1.66)$$

$$u - \{e + (-2\gamma - 2 + \alpha)(m/a)e\}\sin u = M \qquad (3.1.68)$$

ここで、量α、β、γは定数であるが、一般相対論では、何れもが１に等しい値を取る。従って、$\delta\varpi_{(s)}$は、一公転当り $2\pi\times 3m/\{a(1-e^2)\}$ の前進量を有する事になる。この時に、‘Ｋｅｐｌｅｒ方程式’の方は、$(1-3m/a)e$ なる離心率を有する事になって居るのである。此の相互関連が、我々に、その後の大きな進展を齎らす事になったのである。

我々は（ 9)、(10) の両式が示唆する処から、上の形の‘Ｋｅｐｌｅｒ方程式’の存在に気付いては居た。しかし、“金星に依る純粋な周期摂動が、斯かる永年摂動を生み出すとは、とても考えられない”として、其処で頓挫して居たのであった。上の二つの表式はそうした皮相な見方を払拭して呉れた。そうして、勢いを得た後は迷う事なく、次の形の『中間軌道』の導入を図ったのであった（Inoue, 1992）。

$$(11) \qquad M^* = u^* - e_M \sin u^* = \ell - \varpi^* \; ,$$

$$(12) \qquad \tan(f^*/2) = \sqrt{\{(1+e_M)/(1-e_M)\}}\cdot\tan(u^*/2)\; ;$$

$$(13) \qquad r = a^*(1 - e_r \cos u^*)\; ,$$

$$(14) \qquad \phi = \varpi^* + f^*\; ;$$

$$(15) \qquad e_r \equiv e_M + \Delta e\; ,$$

$$(16) \qquad \Delta e \equiv \Delta e_r - \Delta e_M = +1.53\,8156\times 10^{-8}\; .$$

ここで、量a^*、e_M及びϖ^*は、長半径、離心率及び近日点黄経に類似の量を、またM^* u^*、f^*は平均近点離角、離心近点離角、真近点離角に類似の量を表わすものとする。この時、ℓが平均黄経を、r及びϕが夫々、動径および真黄経を表わす事には変りはない。

此の『中間軌道』に依って、先の表式（ 5)、(6) の再現が可能か否かを試みてみる。中心差の方は、離心率 $e=0.205\,6105 + 0.000\,000\,203\,379t$ で捉える事が出来て居るので、e_M は 0.205 6105 の値を取るものとして、展開表式に代入してみる。

$$\begin{aligned}(17)\quad f^* - M^* = &\{(2e_M - e_M^3/4 + 5e_M^5/96 + 107e_M^7/4608 + \cdots) + \\ &+ (2 - 3e_M^2/4 + 25e_M^4/96 + \\ &+ 749e_M^6/4608 + \cdots)\times 0.''041\,95t\}\sin M^* + \cdots = \\ &= (84\,376.''211\,9 + 0.''082\,589t)\sin M^* + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(18)\quad r = &\; a^*\{(1 + e_r e_M/2) + e_M\times 0.000\,000\,203\,379t\} + \\ &+ a^*\{-e_r(1 - 3e_M^2/8 + 5e_M^4/192 + 7e_M^6/9216 + \cdots) + \\ &- (1 - 9e_M^2/8 + 25e_M^4/192 + \\ &- 49e_M^6/9216 + \cdots)\times 0.000\,000\,203\,379t\}\cos M^* + \cdots = \\ = &\; 0.395\,281\,130 + 0.000\,000\,016\,18t + \\ &-(0.078\,333\,467 - 0.000\,000\,075\,00t)\cos M^* + \cdots\end{aligned}$$

結果は、我々の把捉の適切なる事を如実に物語るものとなって居る。

4．只今の『中間軌道』が、‘固定した’楕円軌道と如何なる関係に在るかは明らかにされるべき事である。此の系は、次の形のエネルギー積分を有する（Inoue, 1994）。

(19) $$-\mu/(2a^*) = \{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\}/2 - \{\mu/r + \epsilon R\} \quad ,$$

(20) $$\epsilon R \equiv (\mu/p_M)(\Delta e/e_M)\{-\eta_M^4 + 3\eta_M^2\xi_M - \xi_M^2 - \xi_M^3\}/\eta_M^2 \quad ;$$

(21) $$(\mu \equiv G(m_{太陽}+m_{水星}),\ \eta_M \equiv \sqrt{(1-e_M^2)},\ p_M \equiv a^*\eta_M^2,\ \xi_M \equiv p_M/r) \quad .$$

我々の『中間軌道』は、どの様な運動方程式系の解となって居るのであろう？　これを知る目的で、次の形の Lagrange 函数を導入し Lagrange の運動方程式を書いてみる。

(22) $$L^* = \{\dot{r}^{*2} + (r^*\dot{\phi}^*)^2\}/2 + \mu/r^* + \epsilon R^{*§} \quad ,$$

(23) $$\epsilon R^{*§} \equiv \epsilon R^{*§}(r^*, \phi^*; \dot{r}^*, \dot{\phi}^*) =$$
$$= (\mu\Delta e/e_M)\{-1/a^* + 3/r^* - a^*/r^{*2} - (a^*p_M)/r^{*3}\} \quad .$$

(24) $$d(\partial L^*/\partial \dot{r}^*)/dt - \partial L^*/\partial r^* = 0 \quad ,$$

(25) $$d(\partial L^*/\partial \dot{\phi}^*)/dt - \partial L^*/\partial \phi^* = 0 \quad .$$

この系に変数変換を施して、新しい変数（$r^*, \phi^*; p_r^*, p_\phi^*$）から成る Hamilton 系に移る事を考える。

(26) $$p_r^* \equiv \partial L^*/\partial \dot{r}^* = \dot{r}^* + \partial \epsilon R^{*§}/\partial \dot{r}^* \quad ,$$

(27) $$p_\phi^* \equiv \partial L^*/\partial \dot{\phi}^* = r^{*2}\dot{\phi}^* + \partial \epsilon R^{*§}/\partial \dot{\phi}^* \quad ;$$

(28) $$H^* = \{p_r^{*2} + (p_\phi^*/r^*)^2\}/2 - \{\mu/r^* + \epsilon R^*\} + O(\epsilon^2) \quad ,$$

(29) $$\epsilon R^* = \epsilon R^*(r^*, \phi^*; p_r^*, p_\phi^*) =$$
$$= \epsilon R^{*§}(r^*, \phi^*; \dot{r}^*, \dot{\phi}^*) \quad .$$

ここで、只今の系を、我々の『水星中間軌道』の系に結び付ける事を考える。

(30) $$r^* = r,\ \ \phi^* = \phi\ \ ;\ \ p_r^* = \dot{r}\ ,\ \ p_\phi^* = r^2\dot{\phi} \quad ;$$

これらに依って、上の Hamilton 函数 (28) 式を書いてみる。

(31) $$H^* = \{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\}/2 - \{\mu/r + \epsilon R^*\} + O(\epsilon^2) \quad ,$$

(32) $$\epsilon R^* = \epsilon R^*(r, \phi; \dot{r}, r^2\dot{\phi}) =$$
$$= (\mu\Delta e/e_M)\{-1/a^* + 3/r - a^*/r^2 - (a^*p_M)/r^3\} \quad .$$

これは、我々の『水星中間軌道』のエネルギー積分 (19)、(20) 式に外ならない。以上に依って『水星中間軌道』の系と Hamilton の系との差が、$(\Delta e)^2 \fallingdotseq 2.3\times10^{-16}$ の大きさでしか無いのが判明した。それ故に Hamilton 系に立脚して議論を進めて行きさえすればそれで、『中間軌道』に関する情報が得られる様になっている訳である。

方針が明らかになったので、先ず Hamilton 函数に関する運動方程式を書く。この時に差の$O(\epsilon^2)$ の項を無視するのは勿論の事である。

(33) $$H^* = \{p_r^{*2} + (p_\phi^*/r^*)^2\}/2 - \{\mu/r^* + \epsilon R^*\} \quad ;$$

(34) $$dr^*/dt=\partial H^*/\partial p_r{}^*=\quad p_r{}^*\ -\partial\,{}^{\epsilon}R^*/\partial p_r{}^*\ ,$$

(35) $$d\phi^*/dt=\partial H^*/\partial p_\phi{}^*=p_\phi{}^*/r^{*2}-\partial\,{}^{\epsilon}R^*/\partial p_\phi{}^*\ ;$$

(36) $$dp_r{}^*/dt=-\partial H^*/\partial r^*=p_\phi{}^{*2}/r^{*3}-\mu/r^{*2}+$$
$$+\ \partial\,{}^{\epsilon}R^*/\partial r^*\ ,$$

(37) $$dp_\phi{}^*/dt=-\partial H^*/\partial\phi^*=\ 0\ +\ \partial\,{}^{\epsilon}R^*/\partial\phi^*\ .$$

此の系を、所謂“定数変化の方法”で解く事を考える。この事に付いては、既に詳細に亘って議論して来た処である（井上、1995）。其処で、『人工系』と呼んだ補助的な微分方程式系を構成する必要がある。‘新しい変数’と‘変換式’とを見い出す為にである。我々は、次の文字表記で与えられる系を考える。これは「二体問題の系」に外ならない。

(38) $$dr^\star/dt=\quad p_r{}^\star\ ,$$

(39) $$d\phi^\star/dt=p_\phi{}^\star/r^{\star 2}\ ;$$

(40) $$dp_r{}^\star/dt=p_\phi{}^{\star 2}/r^{\star 3}-\mu/r^{\star 2}\ ,$$

(41) $$dp_\phi{}^\star/dt=\ 0\ \ .$$

此の系を満たす積分定数を、a、e、ϖ及びℓ_0とすれば、標準的な「二体問題の系の解表現」が得られる事になる。これらの積分定数を一纏めにして‘c’と表記して、次の形に解表式を表わす事にする。

(42) $$r^\star\ =\ \Phi_r(c\ ;\ t)\ ,$$

(43) $$\phi^\star\ =\ \Phi_\phi(c\ ;\ t)\ ;$$

(44) $$p_r{}^\star\ =\ \Psi_r(c\ ;\ t)\ ,$$

(45) $$p_\phi{}^\star\ =\ \Psi_\phi(c\ ;\ t)\ .$$

ここで、定数（要素）‘c’を、新変数‘ζ’であるとして、これら‘ζ’に関する微分方程式を書いたならば、それが外ならぬ「楕円要素」に対する『要素変化の式』となる訳である。具体的に書いてみれば以下の如し。ここでは、脚符の‘$_M$’は省略する事にした。

(46) $$d\zeta_k/dt=\sum_{j=1}^{4}\{\zeta_j,\zeta_k\}\,\partial\,{}^{\epsilon}R/\partial\zeta_j\ ,\qquad(k=1,2,3,4)\ ;$$

(47) $${}^{\epsilon}R={}^{\epsilon}R(\zeta\,;\,t)={}^{\epsilon}R^*(r^*,\phi^*;p_r{}^*,p_\phi{}^*)=$$
$$=(\mu\Delta e/e)\{-1/a+3/r-a/r^2-(ap)/r^3\}\ .$$

ここで、記号 $\{\zeta_j,\zeta_k\}$，（j，k=1, 2, 3, 4）は、Ｐｏｉｓｓｏｎの括弧を表わす。特に興味があるのは、近日点黄経 ϖ に於ける永年変化である。そこで、上の摂動函数 ${}^{\epsilon}R$ の永年部 ${}^{\epsilon}R_{(s)}=(\mu\Delta e/e)(2/a)(1-1/\eta)$ で考える事にする。量 n は平均運動を表わすものとする。　$(n\equiv\sqrt{(\mu/a^3)})$ 。

(48) $$d\varpi_{(s)}/dt=\{\eta/(na^2e)\}\,\partial\,{}^{\epsilon}R_{(s)}/\partial e=$$
$$=-(\Delta e/e)\{2/(1+\eta)\}\{1/\eta+(e/\eta)^2\}n\ .$$

数値を代入すれば、既に求めた事のある次の量が得られる（Inoue, 1992）。

(49) $\delta\varpi_{(s)} = -43.374\,896$ 秒角/世紀 .

これに依り、『水星中間軌道』が固定した「楕円軌道」に対して、１世紀当り４３秒角の割合で“後退”して居るのが再確認された訳である。此の事実に気付く事なしに、水星の太陽面通過現象の予報を行なったのであるから“４３秒角足りない”となった訳である。此の事は、上の $\delta\varpi_{(s)}$ を初めとする Δe に依る影響を、Le Verrier が彼の運動理論の中に正しく取り込んで居さえすれば、太陽面通過の現象も余す処なく完璧に予報する事が出来たに違いない事を意味して居る。つまり、水星の運動に、問題とすべきものは何一つ存在などしては居なかったと云う訳である。

５．以上で、我々の関心事の「水星近日点黄経に於ける余剰の前進運動の問題」に対する調べは、総て終った事になる。これ迄に報告して来たものの中に‘甘い認識’に基づいた議論が少なからず散見するので、これを機会に、それらを糺して置きたいと思う。

第２５回天体力学研究会集録（1992） p. 208

(23) $\tan(f/2) = \sqrt{\{(1+e_r)/(1-e_r)\}} \cdot \tan(u/2)$

☆これは、e_r では無くして、e_M でなければならないのであった。

第２６回天体力学研究会集録（1994） p. 166, p. 167

☆ Lagrange 函数を見付ける為に以下の式群を考えなければならないとして、近似の解表式を求めたりして居る。今回の扱いに依って知れる様に、これらが無意味であったとは言わない迄も、無駄な事ではあった。

(32) $L \equiv \{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\}/2 + \mu/r + {}^{\epsilon}V(r,\phi;\dot{r},\dot{\phi};t)$;
(33) $H = \{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\}/2 - \{\mu/r + {}^{\epsilon}R\}$,
(35) ${}^{\epsilon}R = {}^{\epsilon}V - (\partial\,{}^{\epsilon}V/\partial\dot{r})\cdot\dot{r} - (\partial\,{}^{\epsilon}V/\partial\dot{\phi})\cdot\dot{\phi}\}$.

第２８回天体力学研究会集録（1996） p. 108, p. 109

(17) $d\dot{r}/dt - r\dot{\phi}^2 = -\mu/r^2 + \mathbb{R}_0$,
(18) $d(r^2\dot{\phi})/(r\,dt) = \mathbb{T}_0$;
(19) $\mathbb{R}_0 \equiv (\Delta e/e)(\mu/r^2)\{-3 + 2a/r + a^2\eta^2/r^2\}$,
(20) $\mathbb{T}_0 \equiv (\Delta e/e)(\mu/r^2)\{2a/r\}\ e \sin f$.

☆《$\mathbb{R}_0$と$\mathbb{T}_0$の双方を零に等しいと置けば、微分方程式系は二体問題のそれに帰着し要素 ϖ に対する変化を通常の要素変化の式を適用して計算出来る》等として、次の変化の表式を与えて居る。

(23) $\delta\varpi = (\Delta e/e)(1/e^2\eta^2)\{3\eta^2 - 2\xi - \xi^2\}\ e \sin f$.

☆上に出て来て居る $r, \phi; \dot{r}, \dot{\phi}$ は、総てが『中間軌道』を記述する量なのである。従って、文字記号は (11)～(16) 式のものでなければならず、ϖ^* と ϖ とは別物で上の (23) 式も、次の様に表記されるべき処であった。それ故に $\delta\varpi_{(s)}$ が (48)式で与えられるものである時に、$\delta\varpi^*_{(s)}$ が０であっても、一向に構わないのである。

$$\delta\varpi^* = (\Delta e/e_M)(1/e_M^2\eta_M^2)\{3\eta_M^2 - 2\xi_M - \xi_M^2\}\ e_M \sin f^* .$$

第２９回天体力学研究会集録（1997） p. 12, p. 14

$$(f-M)^{*} \equiv \{2\Delta e_{M}+(2e-e^{3}/4+5e^{5}/96+\cdots\cdots)\}\sin M+\cdots\cdots \quad (34)$$

$$\begin{aligned} r^{*} &\equiv a(1+e^{2}/2)+ \\ &+a\{-\Delta e_{r}+(-e+3e^{3}/8+\cdots\cdots)\}\cos M+\cdots\cdots \end{aligned} \quad (35)$$

☆上記の形で《金星に依る周期摂動項の影響を取り込むべきである》と述べて居るがこれは適切な謂ではなかった。これらの表式では、 Le Verrier が与えた（ 5）及び（ 6）式に依る数値表現は得られない。此の事からも、『中間軌道』の有用性が出て来る事になる。
☆此処でも《ϵRを０と置けば、二体問題の系のに相当するエネルギー積分が得られる》等と言って居る。これが不適切なるは、今更、繰り返す迄も無い事である。

参考文献

1. Brumberg, V. A. : 1991, *Essential Relativistic Celestial Mechanics*, 85.

2. Clemence, G. M. : 1943, *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, 38.

3. Flammarion, C. : 1880, *Astronomie Populaire*, 584.

4. 井上　猛 : 1991, 第２４回天体力学研究会集録　148.

5. Inoue, T. : 1992, *Proceedings of the Twenty-Fifth Symposium on Celestial Mechanics*, 205.

6. Inoue, T. : 1994, *Proceedings of the Twenty-Sixth Symposium on Celestial Mechanics*, 164.

7. 井上　猛 : 1995, 第２７回天体力学研究会集録　155.

8. 井上　猛 : 1996, 第２８回天体力学研究会集録　107.

9. Inoue, T. : 1997, *Proceedings of the Twenty-Ninth Symposium on Celestial Mechanics*, 6.

10. Le Verrier, U. J. : 1859, *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris*, V.