「水星中間軌道」の問題点
Some Problems on "the Intermediary Orbit of Mercury"

井上　猛　(京都産業大学)
T. Inoue
Kyoto Sangyo University

Abstract. We examined the Le Verrier's theory of motion for Mercury in order to analyze the cause of the apparition of the famous excess advances (Inoue, 1992). Then, we obtained a result that his starting *elliptic* orbit was not an elliptic one but a slightly retrograding one which we take as *an intermediary orbit.* The amount of this retrograding motion is of the order of 43 arc-seconds per century in the longitude of the perihelion.

There exists a tiny ambiguity in the construction of the disturbing function on the basis of the differences which lie between the intermediary orbit and the ordinary elliptic orbit. We discuss here these points.

1．Le Verrierの言う「水星の初発の楕円軌道」には、金星に依る周期摂動の一部が取り込まれていると考えられる (Le Verrier, 1859)。従って、彼の初発軌道は楕円軌道などでは有り得ずして、少しく趣を異にしたものになっている筈である。そこで、その取り込み具合を我々流に把捉し、それを端的に表現するものとして、次の式群で表わされる様な軌道「中間軌道」を考えた (Inoue, 1992)。

(1) $$u - e_M \sin u = M ,$$

(2) $$M = \int_{t_0}^{t} n\, dt + \chi ,$$

(3) $$\tan(f/2) = \sqrt{\{(1+e_M)/(1-e_M)\}} \cdot \tan(u/2) ;$$

(4) $$r = a(1 - e_r \cos u) ,$$

(5) $$\phi = \varpi + f ,$$

(6) $$\Delta e \equiv e_r - e_M = 1.5381 \times 10^{-8} .$$

ここで、量a、e_r、ϖ、χは、積分定数である。この軌道と楕円軌道との違いを明らかにするのに、要素変化の式の適用を考えた。つまり、この「中間軌道」を表現する為には「楕円軌道」の要素が、どれ程の変化を受ければ良いのかを見ようとした訳である。そこで先ずは、上の中間軌道から導かれる「エネルギー積分」 H に着目した。

(7) $$H \equiv -\mu/(2a) = \{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\}/2 - \{\mu/r + \epsilon R\} ,$$

(8) $$\epsilon R \equiv (\mu\Delta e/e)\{-(a\eta)^2/r^3 - a/r^2 + 3/r - 1/a\} ;$$

(9) $$(\eta \equiv \sqrt{(1-e^2)}) .$$

2．ひと口に要素変化の式の適用と言っても「要素」には種々のものが存在する。我々は当初「Contact Elements」と呼ばれるものに対する変化を考えた。この時は、運動方程式を、予め Hamilton の形に書いて置く必要がある。しかし、それには複雑な偏微分方程式を解かなければならない。 Lagrange 函数を知る為にである。我々は、これが困難であるとして、近似的な Lagrange 函数を用い水星近日点黄経 ϖ に於ける永年変化 $\delta\varpi_{(s)}$ を求めたのであった。その結果、「中間軌道」は、固定した「楕円軌道」に対して、１世紀当り４３秒角の割合で後退している事が判明したのであった。

後は、この近似的な函数の表わす系が、我々の解釈に依って導入された「中間軌道」とどの程度の《ズレ》を有しているかを調べる事のみである。「エネルギー積分」Hの値がそれの近似表式 H_1 に於ては変化する事になって仕舞うが、その変化の大きさが以下の表式で表わされる程度である事から、*数量的に類似している*の故を以って、これで事足れりとしたのであった（Inoue, 1994）。

(10) $$dH_1/dt = -d\,{}^{\epsilon}\Gamma_t/dt \quad ,$$

(11) $$\begin{aligned}{}^{\epsilon}\Gamma_t \equiv (\Delta e/e)(\mu/a\eta^2e^2)\{&(6/\eta^2-4/\eta^4)\xi^4+\\ &+(-2+6/\eta^2-4/\eta^4)\xi^3+(-10+2/\eta^2)\xi^2+\\ &+(4+4\eta^2)\xi-2\eta^2\} \quad .\end{aligned}$$

(12) $$(\xi \equiv a\eta^2/r = 1+e\cos f) \quad .$$

その際に、具体的な数値に依る評価は与えてはいなかった。これを行なうには、離心率の値が知れれば充分である。そこで Le Verrier が用いた値 e＝0.205 6105 を採用する事にすれば、近似表式 H_1 の変化は次の程度であるのが知れる。

(13) $$H_1 = H^{(0)} + {}^{\epsilon}H^{(1)} \quad ;$$

(14) $$H^{(0)} \equiv -\mu/(2a) \quad ,$$

(15) $$\begin{aligned}{}^{\epsilon}H^{(1)} \equiv (\Delta e/e)(\mu/a\eta^6)\{&(8+59e^2/2+11e^4/2)\,e\cos f+\\ &+(-2+11e^2+11e^4)\cos 2f+\\ &+(-2+13e^2/2+e^4/2)\,e\cos 3f+\\ &+(-e^2/4+3e^4/4)\cos 4f\} \quad .\end{aligned}$$

(16) $$|\,{}^{\epsilon}H^{(1)}/H^{(0)}\,| = (2\Delta e/\eta^6)\times 18.395\ 95877 \leqq 6.4421\ 58736\times 10^{-7} \quad .$$

無意味と思われる数の羅列は計算の根拠を示さんが為である。《ズレ》の大きさは、この程度に留まる事が判明したが、これが当該『前進の問題』を論ずる上で適切なものであるか否かは、更に別の角度から検討されなければならない事ではあった。

3．これ迄の議論は、解の表式群(1)～(6)から導かれる「エネルギー積分」の表式(7)～(9)を基にしてのものであった。ところで表式群(1)～(6)は、どの様な運動方程式の解なのであろう？　それを見るには、表式群(1)～(6)が含む*積分定数の総てを*、微分に依って消去しさえすれば済む事である。これが意外にも容易ではなかった。そこで、次の形のもので満足する事にした。

(17) $$d\dot{r}/dt - r\dot{\phi}^2 = -\mu/r^2 + \mathbb{R}_0 \quad ,$$

(18) $$d(r^2\dot{\phi})/r\,dt = \mathbb{T}_0 \quad ;$$

(19) $$\mathbb{R}_0 \equiv (\Delta e/e)(\mu/r^2)\{(a\eta)^2/r^2 + 2a/r - 3\} \quad ,$$

(20) $$\mathbb{T}_0 \equiv (\Delta e/e)(\mu/r^2)\{2a/r\}\,e\sin f \quad .$$

ここで、$\mathbb{R}_0$と$\mathbb{T}_0$の双方を零に等しいと置けば、微分方程式系は二体問題のそれに帰着する。そこで、要素ａ、ｅ、ϖ、χに対する変化は、通常の要素変化の式を適用して計算する事が出来る。

(21) $$\delta a = (\Delta e/e)(2a/\eta^4)\{3\eta^2\xi - \xi^2 - \xi^3\} \quad ,$$

(22) $$\delta e = (\Delta e/e)(1/e\eta^2)\{5\eta^2\xi - \xi^2 - \xi^3\} \quad ,$$

(23) $$\delta \varpi = (\Delta e/e)(1/e^2\eta^2)\{3\eta^2 - 2\xi - \xi^2\}\ e\ \sin\ f \quad ,$$

(24) $$\delta \chi = (\Delta e/e)(1/e^2\eta)\{6(\eta u - f)e^2 + \\ +(-2-\eta^2+2\xi+\xi^2)\ e\ \sin\ f\} \quad .$$

これで見ると、要素 ϖ に永年変化 $\delta\varpi_{(s)}$は存在してはいない！　我々が着目した《中間軌道に依る方法》では $\delta\varpi_{(s)}$の原因を説明すること能わずと云う事なのであろうか？

４．只今の微分方程式系(17)～(20)の解は、式群(1)～(6)に依って与えられている筈である。この微分方程式系を積分すれば、次の形の「エネルギー積分」の表式に到達する。

(25) $$\{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\}/2 + (\mu\Delta e/e)(2/3a\eta^4)(1 + e\cos f)^3 = \\ = C + \mu/r + (\mu\Delta e/e)\{-(a\eta)^2/(3r^3) - a/r^2 + 3/r\}$$

ここで、Ｃは積分定数であるが、これを次の様に選べば、表式(25)は先の表式(7)～(9)に完全に一致する。

(26) $$C = -\mu/(2a) - (\mu\Delta e/e)(1/a) \quad .$$

運動方程式中の摂動力 $\mathbb{R}_0$、$\mathbb{T}_0$ は、函数 ${}^{\epsilon}R_0$から、ｒと ϕ とが互いに独立、更に要素とも独立であるとして計算する時、次の表式に依って導かれ得る。これが、適切なものであるかどうかに付いては、改めて考えてみる必要がある。

(27) $$\mathbb{R}_0 = \partial\, {}^{\epsilon}R_0/\partial r \quad ,$$

(28) $$\mathbb{T}_0 = \partial\, {}^{\epsilon}R_0/(r\,\partial\phi) \quad ;$$

(29) $${}^{\epsilon}R_0 \equiv (\mu\Delta e/e)\{-(a\eta)^2/(3r^3) - a/r^2 + 3/r - 1/a\} + \\ + (\mu\Delta e/e)\{-2/(3a\eta^4)(1 + e\cos[\phi - \varpi])^3\} \quad .$$

ここで(5)式と(12)式とを考慮すれば(29)式の ${}^{\epsilon}R_0$が(8)式の ${}^{\epsilon}R$ に完全に一致するのが見て取れる。従って、「エネルギー積分」の表式(7)～(9)に基づいての議論も、必ずしも見当外れのものでは無かったのが知れる。

一般に、要素ａ、ｅ、ϖは、座標 ｒ、ϕ 及び速度 $\dot{r}$、$r\dot{\phi}$ と依存関係を有しているのであって、そうした場合には $\mathbb{R}_0$及び $\mathbb{T}_0$は、函数 ${}^{\epsilon}R_0$と次の様な対応関係を有していると考えるべきである。

(30) $$\mathbb{R}_0 \ :\ \partial\, {}^{\epsilon}R_0/\partial r - d(\partial\, {}^{\epsilon}R_0/\partial\dot{r})/dt \quad ,$$

(31) $$\mathbb{T}_0 \ :\ \partial\, {}^{\epsilon}R_0/(r\,\partial\phi) - d(\partial\, {}^{\epsilon}R_0/\partial\dot{\phi})/(r\,dt) \quad .$$

『定数変化の方法』の「要素変化の式」への適用に際しては、細心の注意を払って当るべきであるが、この事については既に述べた処ではある（井上、1995）。極めて良く似た二つの系が、一つは、要素 ϖ に永年変化 $\delta\varpi_{(s)}$が存在すると言い、今一つは、それが無いと言う。《例の近似》が、この違いを齎らしたとは考え難い処ではある。

５．以上に述べ来たったものの中には、新たな知見に繋がる様なものは、何一つ見い出されそうにも無い。極めて基本的な処で、明瞭性を欠いた議論しか出来ていないと云うのは如何にも口惜しい事ではある。上の議論で「要素」が何種類も存していると云った事にも充分に配慮する必要があった。つまり、文字記号の書き分けは勿論のこと「要素」相互の関係を詳らかにした上で「変化」同士の比較を行なう事が必要であった。

この様に、多くの問題を山積した状態であるにも拘らず、敢えて本小論を試みたのには訳がある。例の『前進の問題』が、我々の言う「中間軌道」が有する程度の、微小で、しかも、周期的な変化に依って惹き起こされ得る、と云う事を強調したかったからである。連星パルサーの軌道を相対論的に論じるに際して、我々の「中間軌道」に酷似のものが用いられているが、この事は『前進の問題』の本質が、ここら辺りに存している事を如実に物語っていると判ずるべきであろう。そう云った意味からも、惑星運動論を素朴に見直してみるのも意義深い事と考えている。

References.

1. Inoue, T. : 1992 "Termination of the problem of the excess advance in the longitude of the perihelion of Mercury" *Proceedings of the Twenty-Fifth Symposium on Celestial Mechanics* held in Tokyo, 205-210.

2. Inoue, T. : 1994 "Additional remarks for the Termination of the problem of the excess advance in the longitude of the perihelion of Mercury" *Proceedings of the Twenty-Sixth Symposium on Celestial Mechanics* held in Tokyo, 164-173.

3. 井上 猛 : 1995 「定数変化法と云うもの」 第27回天体力学研究会集録、155頁～161頁。

4. Le Verrier, U.-J. : 1859, "Recherches astronomiques.- Chapitre XV. Section I.- Perturbations de Mercure" *Annales de l'Observatoire Impérial de Paris,* Tome V, 16.

(96224S)