定数変化法と云うもの
Essence of the Method of the Variation of Arbitrary Constants.

井上　猛　（京都産業大学）
T. Inoue
Kyoto Sangyo University

Abstract. Essential features will be made clear for the method of the variation of arbitrary constants. The method is so much well known that we have nothing to add. Nevertheless, there exist something not well understood, especially, in the case when one intends to apply this method to the perturbation theories.

Our standpoint for this method is as follows.

(1) Independently of the starting system of differential equations, we introduce **"an artifitial system"** which should conserve the order of the starting system of differential equations. Besides this, **"the artifitial system"** should be certainly solved and contain the sufficient number of "the integration constants". Suppose that **"these constants of integration"** be able to represent always any set of the initial conditions which are imposed on **"the artifitial system"**. This means that the starting unknown functions are "one to one corresponding" to **"the constants of integration"**.
(2) We consider "this set of the solutions" as **"the relations of transformation"** from the starting unknown functions to those which are defined in regarding **"the constants of integration"** as newly introduced unknown functions. It is a matter of course that **"the set of the solutions"** shall depend directly on the choice of **"the artifitial system"**.
(3) Now, we substitute the expressions of **"the relations of transformation"** into the starting system of differential equations and then obtain the new system of differential equations expressed by the newly introduced unknown functions.

When one intends to construct perturbation theories, with the aid of the method of the variation of arbitrary elements, one uses **"various kinds of elements"**. It comes from the manner of the choice of **"the artifitial systems"**. One should then give attention to the fact that different systems of differential equations have different perturbations, according to **"these different elements"**.
Our present standpoint enables us to conclude that **"the excess advance problem in the longitude of the perihelion of Mercury"** is only **"an apparent phenomenon"**. Because it has been carried in the perturbation theories, by the omission of the existence of differences between **"the elliptic elements"** and **"the elements"** that define the intermediary orbit. (Inoue, 1992).

先ず初めに、「定数変化法」の名の下で、世に行なわれているものを、少々“過激な”批判を加えつつ概観する。続いて、これらを基に、我々の言わんとする処を明らかにして行く事にする。最後に、惑星摂動理論との関わりに付いて、簡単に触れて置く事にする。

1．一般数学書の場合

テキストや参考書等で、通常に為されている解説は、理解が浅いと言わざるを得ない。何を言おうとしているのかを示す為に、以下の様な例を引く事にしよう。

(1) $y^{(1)} + P(x)y = Q(x)$,　　($y^{(1)} \equiv dy/dx$) .

先ず $Q(x) \equiv 0$ と置いて $y = C\cdot\exp\{-\int P(x)dx\}$ を得、次に任意定数 C を x の函数であると見做して $y = C(x)\cdot\exp\{-\int P(x)dx\}$ を微分する。その結果、この C に対して次の方程式が導かれる事になる。

(2) $C^{(1)}(x) = Q(x)\cdot\exp\{\int P(x)dx\}$.

これを経て、次の解表式に到ると云う訳である。

(3) $y(x) = [\exp\{-\int P(x)dx\}]\cdot[\int \langle\!\langle Q(x)\cdot\exp\{\int^x P(s)ds\}\rangle\!\rangle dx + C^*]$.

これを、間違いと言う積りはない。ただ、「一階の方程式を解くのに、任意定数が C、C^* と、二個も出て来る」等と云った謂い（一松、1962）が、気になるのである。事の次第が充分に、理解されていれば、こうした見方など、出て来る事は無い筈である。

一階では、主張したい事の本質も、明確な形では現われては来ない。二階ならば、既に充分に、一般性が出て来るのであるが、「n階線型微分方程式の、一般の性質」なる項で「定数変化法」が論じられている（福原、1951）ので、これを見てみる事にする。

(4) $y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_n(x)y = Q(x)$.

ここでも、 $Q(x) \equiv 0$ と置き、次の斉次方程式を考える。

(5) $y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_n(x)y = 0$.

この系の基本解を $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ であるとし、これと任意定数の組 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ との一次結合で以て、次の表式を考える。

(6) $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$.

続いて、一階の場合と同様に、これら任意定数の総てが x の函数であるとして、これらに対する微分方程式を導いて行く。只今の様に、 x の函数と考えた時の C を、特に v と表記する事にしよう。この時に気になるのが、次の様な【条件】なるものを課す事である。

(7) $y^{(j)} \equiv v_1y_1^{(j)} + v_2y_2^{(j)} + \cdots + v_ny_n^{(j)}$,　　$(j=1, 2, \cdots, n-1)$.

我々の立場からすれば、この（7）式の関係は“必然的に存在していなければならない”性質のものとなる。これを『【条件】と見るか“必然”と見るかは、単なる見解の相違でしかない』等と言っている限りでは、「定数変化法」の本質も見えては来ない。

尚、論者に依っては、【条件】（7）の代りに、これと完全に同等である、次の（8）を【条件】としている者もある。我々からすれば、“いずれも、必然なるべし”である。

(8) $0 \equiv v_1^{(1)}y_1^{(j)} + v_2^{(1)}y_2^{(j)} + \cdots + v_n^{(1)}y_n^{(j)}$,　$(j=1, 2, \cdots, n-2)$.

2．天体力学書の場合

凡そ、摂動の方法に基づいて、天体の運動を論じむとするもので、「要素変化の式」を必要としないものは無いであろう。この「要素変化の式」なるものは、「定数変化法」をその導出の根拠に据えている。余りにも、基本的な事柄であってみれば、ここで取り上げるのも憚られる処ではある。しかし、必ずしも、その本質が、正しく捉えられているとも限らないので、敢えて、ここで、小論を試みる次第である。

ところで、これが数学書の影響に依るものかどうかは定かではないのであるが、多くの場合に『【条件】（ 8)式付きの（ 6)式』流に基づいて、この「要素変化の式」なるものが導かれている（Brouwer, 1961）のである。具体的に見てみる為に、次の形の運動方程式を取り上げてみよう。

$$(9) \qquad d^2x_j/dt^2 + \mu x_j/r^3 = X_j\ , \qquad (j=1,2,3)\ .$$

ここでも、初め $X_j = 0$ と置いた系を考える。これは、容易に解ける系であるから、その解表式も、直ちに書き下せる事になっている。下で、量 f_j 及び g_j は、二体問題の解を与える「既知函数」である。量 $c_1, c_2, \cdots, c_6$ は、楕円要素そのもの、もしくは、これらの組み合わせで与えられる、楕円要素と同格の「要素」である。

$$(10) \qquad x_j = f_j(c_1, c_2, \cdots, c_6; t)\ , \qquad (j=1,2,3)\ .$$

$$(11) \qquad dx_j/dt = g_j(c_1, c_2, \cdots, c_6; t)\ , \qquad (j=1,2,3)\ .$$

続いて、 $X_j \neq 0$ での（ 9）式を満たすべく、量 $c_1, c_2, \cdots, c_6$ を時間の函数と考える。この時（10）式（11）式と併記して置きながら、全く不可解な事に、（10）式しか考えに入れないで、話を始めるのである。

何はともあれ「流れに沿っての話」を続ける為に量 $c_1, c_2, \cdots, c_6$ を $v_1, v_2, \cdots, v_6$ と書き換えて、次の関係式を考える事にする。

$$(12) \qquad x_j = f_j(v_1, v_2, \cdots, v_6; t)\ , \qquad (j=1,2,3)\ .$$

この関係を、初発の運動方程式（ 9）に代入し、新たに新変数 $v_1, v_2, \cdots, v_6$ が服すべき微分方程式を導いて行く訳である。しかし、「六個」の未知数に対して「三個」の関係式しか無いのであるから、一対一の対応が不可能なのは明らかな事である。そこで、どうしても追加の【条件】が必要になって来る。

この辺の事情は、上で、（ 6）式のみを考えた為に、追う様にして（ 8）式を条件式とせざるを得なかったのと、完全に軌を一にしている。初めから（10）式（11）式の両方を考えに入れていさえすれば、問題は皆無であったのに、と云うのが我々の見方である。

3．定数変化法の心

微分方程式の中には、適当な変数変換に依って、容易に解ける系に移れるものがある。多くの場合、先人の知恵や論者の勘に頼って、これを行なって来ていると云うのが実情である。こうしたものの一つに、当該「定数変化法」なるものも、登場して来るのである。

一般数学書の場合、そこに登場して来る問題は、「この方法」で、容易に解ける様なものばかりである。中には、その問題を解くにはこれに依るしか方法が無い、と云った印象を与えるものもある。これは、正鵠を得ているもの、とは言い難い。

「定数変化法」に対する、我々の見方は、以下の通りである。

（甲）『人工系』の設定と解表式の獲得。

初発の微分方程式系を、横目で睨みはするが、一応、それとは無関係に
以下の要件を満たすものであれば、『人工系』たり得るものと考える。
即ち、容易に解けるものであって、必要にして充分なる「積分定数」を

含むものであれば、等しく、『人工系』となり得るのである。この時に「積分定数」は、『人工系』に課せられた、任意の初期条件を、一意に決定出来るものでなければならない。

（乙）新変数の導入と変数変換式の把捉。

上で得られた「解表式」を、変数変換の関係式と捉え、ここに含まれる「積分定数」を新変数に選ぶ。それ故、設定した『人工系』毎に、変数変換の関係式も異なれば、新変数の意味内容も、その都度、変って来る事になる。この時、新旧の両変数が、既に一対一に対応する様になっているべき事、今更、言う迄も無い事である。

（丙）新変数が満たすべき新微分方程式。

任意の初期条件と「積分定数」とを、関連付けるものが、変数変換式に外ならないが、これは、新旧の両変数を含むものである。ここに、存在している「旧変数」を、初発の方程式に代入して、これを「消去」、残るは新変数に対する微分方程式のみとなる。この時、変換は一意であるから条件追加の要など皆無である。

これを要するに、《積分可能な系を、人工的に作り、そこでの解表式を変数変換式とし積分定数を新変数とする》と云う事になる。この意味からすれば、世に「定数変化法」と言われているものの中には、これに該当しないものも、数多く含まれているのが知れる。

この後は、この呼称が、我々の意味に限って使われる事を希うものである。何となれば**「定数変化法」の本質が、「変数変換式の発見法」**であってみれば、「議論の出発点から対応を、一対一のものにして置く」と云うのは、極めて自然な事でしかないからである。それを「不足している条件は追加すれば良い」として、様々にこれを行なえば、その度に異なった変換式を定義し・導入した事になって行く。厳重注意事項ではある。

言葉で述べ来たった処を、少しく定式化して置く。この目的の為に、与えられた初発の微分方程式を、一階連立の次の形に書いて置く。（Moulton, 1930）。

(13) $$dx_j/dt = X_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; t), \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

これに対して、変数変換式を見い出す目的で、次の人工系を導入する。（甲）。

(14) $$d\xi_j/dt = \Xi_j(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n; t), \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

仮定に依って、この系は解ける。そこで、積分定数を $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ として、解表式を次の形に書く事にする。

(15) $$\xi_j = \Phi_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n; t), \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

ここで「定数変化法」の教える処に従って、只今の ξを旧変数の xに、 αを新変数の yに置き換えて、両者を、解表式 Φで結び付ける訳である。（乙）。

(16) $$x_j = \Phi_j(y_1, y_2, \cdots, y_n; t), \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

これを、初発の系（13）式に代入して、 yに関する微分方程式に書き換える。（丙）。

(17) $$dy_j/dt = Y_j(y_1, y_2, \cdots, y_n; t), \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

これは、初発の（13）式と、完全に同等なものである。同等と云いつつも、元の系よりも見通しが良くなったとしたら、それは只今の変換に、意味があったと云うべきであろう。

この系も、解く事が出来たとしよう。新たな積分定数を $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ として、解を次の形に書いて置く事にする。

(18) $$y_j = P_j(a_1, a_2, \cdots, a_n; t), \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

これを、変換式（16）に代入すれば、所望の xが滞り無く求められた事になる訳である。

上記の人工系とは別に、今一つの人工系を導入して、類似の議論を展開する。**（甲）**。

$$(19) \qquad d\eta_j/dt = H_j(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n; t) , \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

この時の解表式を、$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ を積分定数として、次の様に書いて置く。

$$(20) \qquad \eta_j = \Psi_j(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n; t) , \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

再び、「定数変化法」の教える処に従って、今度は ηを旧変数 xに、βを新変数 zに置き換えて、両者を、解表式 Ψで結び付ける。斯くして、類似の、次の表式を得る。**（乙）**。

$$(21) \qquad x_j = \Psi_j(z_1, z_2, \cdots, z_n; t) , \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

今度も、初発の系（13）式に代入して、新たに zに関する微分方程式を導く。**（丙）**。

$$(22) \qquad dz_j/dt = Z_j(z_1, z_2, \cdots, z_n; t) , \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

ここでの解を、積分定数を $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ として、次の形に書いて置く。

$$(23) \qquad z_j = Q_j(b_1, b_2, \cdots, b_n; t) , \qquad (j=1,2,\cdots,n) .$$

これを変換式（21）に代入すれば、等しく、解 xが、与えられる事になっている。
上記、二通りの『人工系』（14）式と（19）式の間の違いが、その後の、「積分定数」にも、「解表式」にも、違いを生ずる事になる。この事には、充分に注意すべきである。

4．具体例での相違の明示

我々の言わむとする処を明示する目的で、次の様な例題（長沢、1983）を考えてみる。

$$(24) \qquad y^{(2)} - y = 1 .$$

先ずは、引用文献の解説に従って、流れを追って行く事にしよう。「定数変化法」で解く為に、次の斉次方程式を考える。これは、我々の言う『人工系』に、相当する。

$$(25) \qquad y^{(2)} - y = 0 .$$

この系の基本解が、$y_1 = \exp(x)$ 及び $y_2 = \exp(-x)$ と求まるので、c_1及び c_2 の二個を任意定数として、一般解 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ を得る。これを、初発の（24）式に代入して次の微分方程式を得ると云うのである。ここでも cを vと、書き換えて置く事にしよう。

$$(26) \qquad \{v_1^{(2)} + 2v_1^{(1)}\}\exp(x) + \{v_2^{(2)} - 2v_2^{(1)}\}\exp(-x) = 1 .$$

そうして「決めるべき xの函数が v_1、v_2 の二個であるのに、求められた条件式は一つでしか無い」と言い、続いて、「条件式が不足なら、自分で勝手に作れば良い」とする訳である。これでも、最終的には、正しい結果に到達する事は出来る。
そこで、用いられている条件式を、我々流に整理すれば、次の様なものになる。

$$(27) \qquad y = v_1\exp(x) + v_2\exp(-x) , \qquad v_1^{(1)} = 0 .$$

初発の微分方程式（24）に関する限りは、これでも解けるのであるから、何も言う事は無いのかも知れない。しかし、我々の立場からするならば、大いに不満である。

同一の『人工系』(25) 式の下で、「我々流」の扱いを展開してみるならば、以下の様なものになるであろう。次の形の一次結合表現を出発の一つに据える処までは同じである。

(28) $y(x) = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x)$.

ここで、 c_1 も c_2 も、いずれも定数であるから、以下の関係の成立は明白である。

(29) $y^{(j)}(x) = c_1 \exp(x) + (-1)^j c_2 \exp(-x)$, $(j = 0, 1, 2, \cdots)$.

初期条件として、$y(x_o)$ 及び $y^{(1)}(x_o)$ の二つを選んでみる。これらを与える、必要にして充分なる「積分定数」c_1 、c_2 は、次の連立方程式に依って、一意に決定され得る。

(30) $y(x_o) = c_1 \exp(x_o) + c_2 \exp(-x_o)$,

(31) $y^{(1)}(x_o) = c_1 \exp(x_o) - c_2 \exp(-x_o)$.

これに依って、「積分定数」を含む「解表式」が、次の二式であれば良いのが判明した。

(32) $y(x) = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x)$,

(33) $y^{(1)}(x) = c_1 \exp(x) - c_2 \exp(-x)$.

後は、量 y 及び $y^{(1)}$ を旧変数とし、量 c_1 及び c_2 の「座」を、 v_1 及び v_2 の二量に襲わせて、新変数とするのみである。これが、新旧両変数を結ぶ変換式なのである。

(34) $y(x) = v_1 \exp(x) + v_2 \exp(-x)$,

(35) $y^{(1)}(x) = v_1 \exp(x) - v_2 \exp(-x)$.

我々の言う「定数変化法」での話を続ける事にしよう。(34) 式と (35) 式の両式から初発の方程式 (24) に等価な方程式を導いて行く。(34) 式の微分から (36) 式を得るがこれを、(35) 式と比較する。そうすれば、数学書などで言う【条件】なるものが、実は“必然的に”出て来る性質のものであったのが知れるであろう。

(36) $y^{(1)}(x) = \{v_1 \exp(x) - v_2 \exp(-x)\} + \{v_1^{(1)} \exp(x) + v_2^{(1)} \exp(-x)\}$;

(37) $0 = \{v_1^{(1)} \exp(x) + v_2^{(1)} \exp(-x)\}$.

次には、(35) 式を微分して得られる関係式 (38) を、(24) 式と比較する。

(38) $y^{(2)}(x) = \{v_1 \exp(x) + v_2 \exp(-x)\} + \{v_1^{(1)} \exp(x) - v_2^{(1)} \exp(-x)\}$;

(39) $1 = \{v_1^{(1)} \exp(x) - v_2^{(1)} \exp(-x)\}$.

斯くして、(37) 式 (39) 式の二式から、新変数 v_1及び v_2が満たすべき方程式が得られその解も、任意定数 C_1 及び C_2 を含む形で、滞り無く求められる。

(40) $v_1^{(1)} = \{\exp(-x)\}/2$, $v_2^{(1)} = -\{\exp(x)\}/2$;

(41) $v_1 = C_1 - \{\exp(-x)\}/2$, $v_2 = C_2 - \{\exp(x)\}/2$.

新変数 v_1 及び v_2 が知れたからには、これを (34) 式 (35) 式に代入しない手は無い。斯くして、これを行なって、初発の変数 y 及び $y^{(1)}$ が得られると云う次第である。

(42) $$y(x) = [C_1 - \{\exp(-x)\}/2]\exp(x) + [C_2 - \{\exp(x)\}/2]\exp(-x) = \\ = \{C_1\exp(x) - 1/2\} + \{C_2\exp(-x) - 1/2\} = \\ = C_1\exp(x) + C_2\exp(-x) - 1 .$$

(43) $$y^{(1)}(x) = [C_1 - \{\exp(-x)\}/2]\exp(x) - [C_2 - \{\exp(x)\}/2]\exp(-x) = \\ = \{C_1\exp(x) - 1/2\} - \{C_2\exp(-x) - 1/2\} = \\ = C_1\exp(x) - C_2\exp(-x) .$$

只今の例題に関して、更に補足をするならば、次の様な事が言えるであろう。

◎人工系としては、例えば $y^{(2)} = 1$ や $y^{(2)} + y = 0$ の様なものを選んでも一向に構わない。我々流の「定数変化法」でいずれの場合も、容易に解けるのが知れる。

◎初期条件が、$y^{(1)}(x_o)$及び $y^{(2)}(x_o)$ で、与えられているとしても、全く同様の議論が可能である。「積分定数」を一意に決定する事が出来さえすれば、組み合わせは、どんなものであっても構わない。この時、初発の微分方程式が解けるか否かは、その選択の与り知らぬ処である。

5．惑星摂動理論との関連

断る迄も無い事であるが、「定数変化法」と摂動理論とには、「直接には」何の関わりもありはしない。然しながら、殆どの惑星摂動理論が、その基礎に、要素変化の式を据える事から、「定数変化法」の適用、即ち摂動理論、と云った印象を、ともすれば受け勝ちである。（堀、1988）。それは、逆は、真なのであるから、無理からぬ処ではある。これはこれで良い。大切なのは、「定数変化法」を正しく運用する事である。

既に触れた処であるが、一つの系を解くのに、二つ以上の『人工系』を用いた場合には二つ以上の、異なる変換式が存在する事になる。この時、相互の違いが、「はっきり」している場合には、人は、「これを見逃す事も無い」のであるが、これが、極く微小な場合にはともすれば、これを見逃して仕舞う様な事も起こり得る。

二体問題の系を『人工系』に選んで、摂動理論の展開を図っていても、途中での『一寸した便法』の導入等が、実は、微妙に違う「中間軌道」即ち、異なる『人工系』の導入に繋がって仕舞うと云った事も起こり兼ねないのである。「水星近日点の前進」が、世紀を越える「大問題」となったのも、ここら辺りの事が等閑に付され看過されたが為に生じたのでは無かったか（Inoue, 1992）。この「前進の問題」、既に、決着が着いたと考えているが、斯かる観点からも考察を加えてみたいと考えている。

6．参考文献

1．BROUWER Dirk : 1961 Methods of Celestial Mechanics Academic Press p. 274.
2．一松　信 : 1962 解析学序説　上巻　裳華房 p. 91.
3．堀　源一郎 : 1988 天体力学講義　東京大学出版会 p. 187.
4．福原　満洲雄 : 1951 微分方程式　上巻　朝倉書店 p. 41.
5．INOUE Takeshi : 1992 第25回天体力学研究会集録 p. 205.
6．MOULTON F. Ray : 1930 Differential Equations Macmillan p. 60.
7．長沢　工 : 1983 天体力学入門（下）地人書館 p. 210.

(95228MA)