第829号（第75巻）　天　界　1994年6月号

THE HEAVENS

天界6月号（第75巻，第829号）目次

Vol. 75, No. 829, Jun., 1994

天体力学入門講座(5)

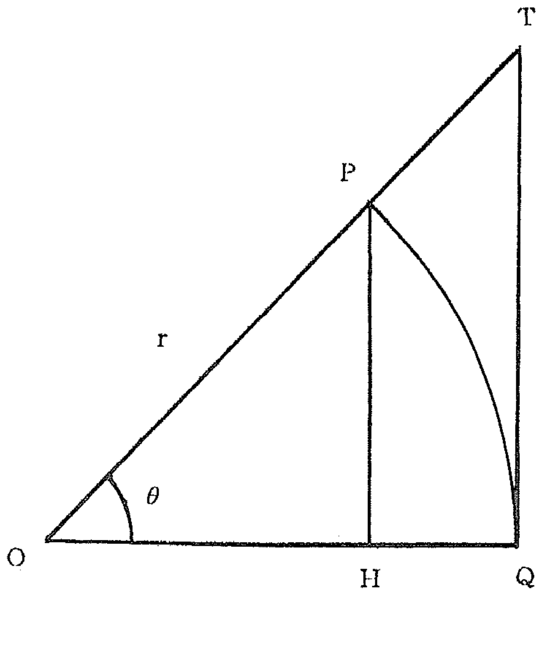
（天界4月号第109頁のつづき）

理事　井上　猛　T. Inoue
（京都産業大学・教授）

「問．次を証明せよ．

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

解．半径 r の円弧を考える．中心角を弧度法で測って θ ラジアンとすれば，右図から次の不等式の成立するのが知れる．



$$\overline{PH} < \widehat{PQ} < \overline{TQ}$$

これを，r と θ で表わせば次の様になる．

$$r \sin\theta < r\theta < r\tan\theta$$

すべての量が正であるから，上の不等式は簡単な計算に依って，次の形に変形する事が出来る．

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

ここで，$\cos\theta \to 1$，$(\theta \to 0)$ であるから，$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$，$(\theta \to 0)$ が言えた事になる．(証明終り)」

高校・大学の教科書は言うに及ばず，殆んどの参考書がこれで事足れりとしている．大いに不満である．僅かに，事の本質に気付いた人間が，これと異なる論じ方を試みているに過ぎない[1]．弧度法で中心角を測ったと言うが，弧度法とは何なのか？「円弧の長さを，半径で割って定義したものだ」．円弧の長さなるものはどの様にして決めた？「それは，…」

只今の議論で明らかな様に，弧度法を定義するには，円弧の長さなるものを，それよりも先に知っていなければならないのである．この時，円弧の長さを積分で定義すると言うのが，参考文献1の立場である．しかし，なぜ積分で定義するのか．出来るのかと言う事については，特に触れるところも無い儘である．我々は，円と言う図形の特殊性に着目して，疑問を差し狭む余地の無い程に，緻密な論を展開して行きたいと思う．

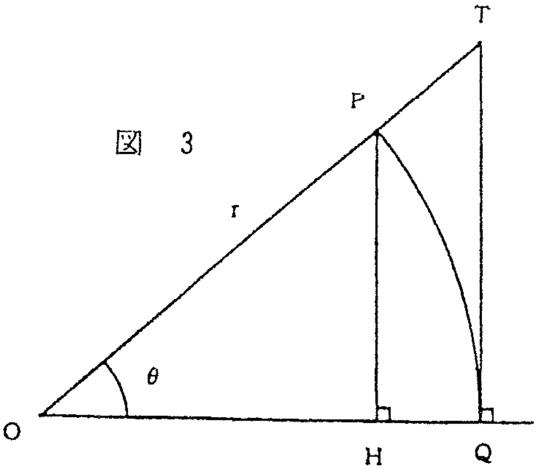


図　3

「長さ」が，二点を結ぶ数直線上の目盛の差と言う事を再確認して，その上で半径が r，中心角が θ 度の扇形を考える事にする．

図を参考にして，次の様な量を導入する．

$$(12)\quad \begin{cases} a_0 = \overline{PH} = r\sin\theta \\ b_0 = \overline{TQ} = r\tan\theta \end{cases}$$

明らかに，次の大小関係の存在が言える．

$$(13)\quad a_0 < b_0$$

次に，中心角を二等分した次の図を考え，上に倣って，以下の様な量を導入する．

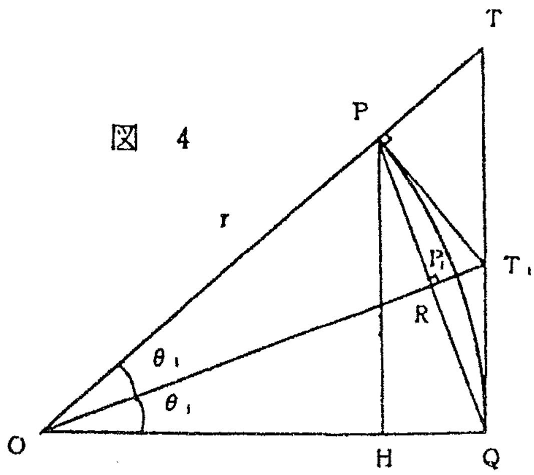


図　4

$$(14)\quad \begin{cases} a_1 = \overline{PQ} = 2\overline{RQ} = 2r\sin\theta_1 \\ b_1 = \overline{PT_1} + \overline{T_1Q} = 2\overline{T_1Q} = 2r\tan\theta_1\,; \end{cases} \quad \left(\theta_1 = \frac{\theta}{2}\right)$$

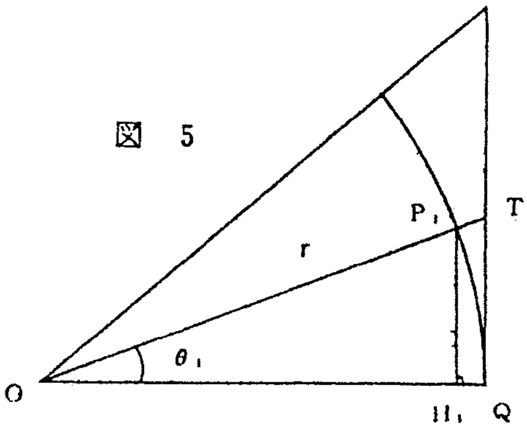
以下の大小関係も，図から明らかである．

(15)　$a_0 < a_1 < b_1 < b_0$

上の手順を続けて，等分された中心角のそれぞれを，更に二等分して，円弧に内接する折れ線と，円弧に外接する折れ線を考えて行く，それに伴なって，内接折れ線の長さ a_2, a_3, … および，外接折れ線の長さ b_2, b_3, … が次々と定義されて行く事になる．この時，二個の無限数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の得られる事になっているのに気が付く．当然，次には，これらの収束性が問題になって来る．

以下の議論を見通しの良いものにする為に，次の様な図を描いてみる．図4と見比べる時，$\overline{P_1H_1} = r\sin\theta_1 = \overline{RQ}$ が成立するから，$a_1 = 2\overline{P_1H_1} = 2r\sin\theta_1$ であるのが知れる．他方で，$b_1 = 2\overline{T_1Q} = 2r\tan\theta_1$ であった．これは，三角形 T_1OQ・扇形 P_1OQ で考えたものは三角形 TOQ・扇形 POQ で考えたものの丁度半分になっている事を表わしている．図5の図形は，出発の図3のそれと類似の構図となっている．従って，図5を出発の図と見做して，中心角を二等分し，$\theta_2 = \frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta}{2^2}$ と置く時は，$a_2 = 2 \times 2r\sin\theta_2 = 2^2 r\sin\theta_2$, $b_2 = 2 \times 2r\tan\theta_2 = 2^2 r\tan\theta_2$ となるのは，容易に推測される処である．この時の内接折れ線および外接折れ線の状態を描いてみれば次の様である．分り易くする為に，中心角を二倍にしたものを描いた．

図 5



以上から，第 n 回目の中心角二等分の後には，それぞれの折れ線の長さが，次の形に与えられるのが知れる．

$$(16)\quad \begin{cases} a_n = 2^n r\sin\theta_n \\ b_n = 2^n r\tan\theta_n \end{cases}$$

$$\left(\theta_n = \frac{\theta}{2^n}\ ;\ n = 1,\ 2, \cdots\right)$$

これら二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の元の間には，$a_n = b_n\cos\theta_n$ なる関係が存在するから，$b_n - a_n = b_n(1 - \cos\theta_n) > 0$ が直ちに知れる．即ち，次の大小関係の存在が，知れる訳である．

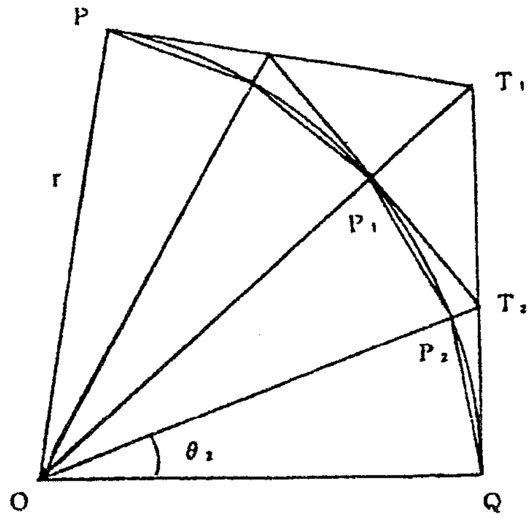


図 6

(17)　$a_n < b_n$,　$(n = 1,\ 2, \cdots)$

更に，次に示す様な単調性が，それぞれの数列には存在する．

先ず，$\{a_n\}$ について調べてみよう．

$$a_n - a_{n+1} = 2^n r \sin\theta_n - 2^{n+1} r \sin\theta_{n+1} = 2^n r\,(2\sin\theta_{n+1}\cdot\cos\theta_{n+1} - 2\sin\theta_{n+1})$$
$$= -a_{n+1}(1-\cos\theta_{n+1}) = -2\,a_{n+1}\cdot\sin^2\theta_{n+2} < 0\ ;$$

この事から，数列 $\{a_n\}$ に，単調増大性の存在しているのが知れた．

(18)　$a_n < a_{n+1}$ ，　$(n=1,\ 2,\cdots)$

続いて，$\{b_n\}$ について調べてみる．

$$b_{n+1} - b_n = 2^{n+1} r \tan\theta_{n+1} - 2^n r \tan\theta_n = a_{n+1}(\sec\theta_{n+1} - \cos\theta_{n+1}\cdot\sec\theta_n)$$
$$= -a_{n+1}\cdot\sin^2\theta_{n+1}\cdot\sec\theta_{n+1}\cdot\sec\theta_n < 0\ ;$$

これに依って数列 $\{b_n\}$ が，単調減少数列であるのが知れた．

(19)　$b_{n+1} < b_n$ ，　$(n=1,\ 2,\cdots)$

不等式 (17)，(18)，(19) と，先に見た (15) 式とを組み合わせれば，次の大小関係が得られる．

(20)　$a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_1 < b_0$

これは，内接折れ線の長さ a_n は，どこまでも増大して行くのであるが，定数 b_0 よりも常に小であり，外接折れ線の長さ b_n は，限りなく減少して行くにも拘らず，定数 a_0 より小さくなる事は決して無いと言う事を表わしている．この時，数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増大数列であると言い、数列 $\{b_n\}$ は下に有界な単調減少数列であると言う．この様な数列は，必ず収束して極限値を有するのであった（有界・単調な数列の収束性）．今回は，流れの都合上，この定理の証明には立ち入らない事にする．

極限値が存在するのであるから，これらのそれぞれを a および b と書く事にすれば，次の大小関係を満たす事になっている．

(21)　$a_n < a \leqq b < b_n$ ，　$(n=1,\ 2,\cdots)$

それぞれの数列の収束性を，$\varepsilon - N$ の方法で表記してみれば，次の様である．

(22)　$0 < a - a_n < \varepsilon$,　$0 < b_n - b < \varepsilon$　$(N < n)$

更に，次の表式が，上と同一の ε および N に対して，成立するのが言える．

(23)　$0 < b_n - a_n < \varepsilon$　$(N < n)$

与えられた微小正数 ε に対して，次式で与えられる自然数 N を選んで置けば，上記の収束条件の式は，すべて満たされているのが知れる．

(24)　$N = \left[\log\dfrac{r}{\varepsilon}\right] + 1$

（〔　〕: ガウス記号；log: 自然対数）

(1994. 4. 23)

【参考文献】

1）吉田洋一『微分積分学序説』培風館　p.iii および p.60　(1958)