第827号（第75巻）　天界　1994年4月号

THE HEAVENS

天界4月号（第75巻，第827号）目次

Vol. 75, No. 827, Apr., 1994

本会の会費は普通会員が**年4,800円**，本会の維持運営に協力する意味で**年10,000円**を納入される方は維持会員です．入会希望者は当会事務局（〒520-21 滋賀県大津市上田上桐生町289 **山本天文台内**）まで，なお天界旧号が若干在庫しています．希望者は御連絡下さい．**原稿**は編集者（〒664 伊丹市美鈴町2—57—18　佐伯恒夫）までお送り下さい．

天体力学入門講座(4)

（天界1992年11月号第335頁のつづき）

理事　井上　猛　T. Inoue
（京都産業大学・教授）

「講座」とは名ばかりで，一年半も中断して仕舞った．これには「書けない訳」「書かない理由」があった．1992年の初夏に「一寸した発見」があって，前回は「惑星運動に一般相対論が必要か」の意気込みでこれを書く事が出来た．その直後，この発見の小さくない事に気付き，本腰でこれの吟味に取り掛かったのであった．一年余を要したが，「前回の勢い」の儘で続行可能な事が判明した．

この間にも，広く一般に認められて居る事柄に限定して論を進めて行きさえすれば，幾らでも書く事は出来た筈である．しかし敢えてこれを行なわなかった．それは，本講座が「入門」ではあっても「初等」ではないとの思いがあったから

である．世に行なわれて居る事柄のみを広く浅く扱うのではなくして，特殊な問題の偏った扱いであったとしても，それが天体力学の本質に根差した問題の場合には，臆する事なく正面からこれに向かって行きたいと考えて居る．そうする事が，真に天体力学の面白さを体験され同学の志となられる契機ともなり得ると信ずるからである．ただ，この様な気儘が，お勧め下さった佐伯前会長のお気持ちに沿うものかどうかだけは，大いに気になる処である．

ニュートン力学が，ユークリッド幾何学の成り立つ所謂平坦空間を記述表現の基本空間として居る事を二，三の具体例を通して見て置く．本来なら，先ず初めに運動方程式を立て，次にこれを解いて行くべき処であるが，ここではこれとは逆の順を辿る事にする．即ち，先ず初めに解表式が与えられたとして，これを微分し，運動方程式を導いて行く事にするのである．微分計算に物の長さは付き物であるが，この「物の長さ」なるもの慎重に扱って行かなければならない物であるのに気付かされる．これらの事を前回の「序　ニュートン力学と言うもの」の続きとして以下に述べて行く．

三次元のユークリッド空間を考える．この空間内に一つの直交座標系$O-xyz$を設定する．一点Oで三本の数直線が直交する系を考える訳である．

◎　**一様重力場内での放物体の運動の例**．質量mの物体の，時刻tに於ける座標(x, y, z)が次式で与えられるとする．ここで，x_0, y_0, z_0 ; u_0, v_0, w_0 およびt_0はすべて定数である．特にgは正の定数である．

$$(1)\quad \begin{cases} x=f(t)=x_0+u_0(t-t_0) \\ y=g(t)=y_0+v_0(t-t_0) \\ z=h(t)=z_0+w_0(t-t_0)-\dfrac{1}{2}g\,(t-t_0)^2 \end{cases}$$

これらの表式は，時刻t_0に点(x_0, y_0, z_0)に在った物体が，初速度(u_0, v_0, w_0)で放り出された事を表わしている．z軸方向では，負の向きにgの加速度が存在している．これらの事を．以下の微分計算を通して見て行く事にしよう．

x座標を表わす函数$f(t)$を時間tで微分する．

$$(2)\quad x_2=f(t_2),\ x_1=f(t_1)\ ;\quad t_2\equiv t_1+\Delta t\ ;$$

これらを微分計算の定義式に代入してみる．

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)}{(t_2-\Delta t)-t_1}=\frac{\{x_0+u_0(t_1+\Delta t-t_0)\}-\{x_0+u_0(t_1-t_0)\}}{(t_1+\Delta t)-t_1}$$
$$=\frac{u_0\,\Delta t}{\Delta t}=u_0$$

微小量Δtは分母分子で相殺して姿を消して仕舞った．これはΔtの大きさには無関係に，平均変化率が一定値u_0に等しい事を表わしている．つまりx軸方向に等速運動をしているのである．同じ事はy軸方向についても言えるのが知れる．

(9)　$m\ddot{x}=O,\ m\ddot{y}=O,\ m\ddot{z}=-mg$

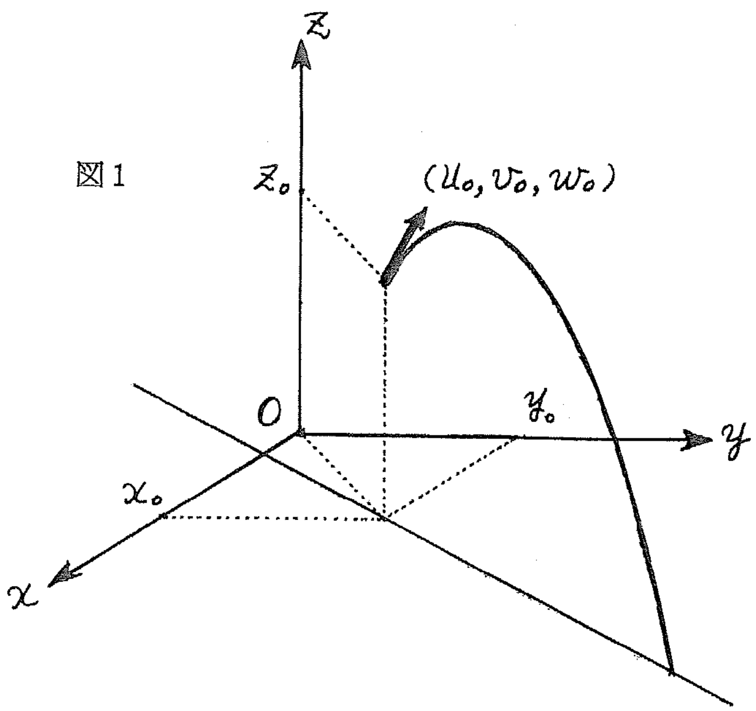

図1

これは地上で放り投げた物体の運動を記述する微分方程式と見做す事が出来る．勿論この時，空気の抵抗や物体自身の回転等はすべて無視するものとし，z 軸を鉛直方向に選ぶものとする．

◎　鉛直面内での振子の運動の例．ここでも，重力加速度 g は一定とし，空気の抵抗や物体の回転運動等は一切考えないものとする．更に，紐は伸縮が無く，質量が無視出来る程に軽いものであると仮定する．平面運動であるから，水平方向に x 軸を，鉛直方向に z 軸を選ぶ，物体の質量を m とすれば，運動エネルギー：$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)$ と，位置エネルギー：mgz との和は，力学的エネルギー保存の法則から一定となる．

(10)　$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)+mgz=E$,（$E$：定数）

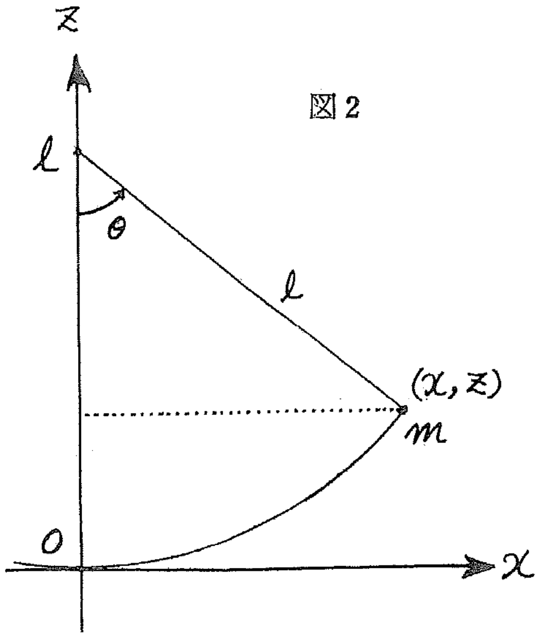

図2

前の例と同様に，この式を時間で微分して加速度を求め，運動方程式を書き出したいのであるが，この儘では困難である．そこで，動径 r，偏角 θ を導入して直交座標（x，z）を，極座標（r，θ）に変換して考える事にする．只今の場合，動径 r は，紐の長さ l に等しいので変換式の中に，これを取り込んで置く．

(11)　$x=l\sin\theta,\ z=l-l\cos\theta$

これらを時間で微分すれば，速度成分 $\dot{x}$，$\dot{z}$ が，角度 θ の微分係数 $\dot{\theta}$ で表わされる事になるが，その為には三角函数の微分計算を行なわなければならない．微分計算の定義式に従ってこれを試みよう．

只今の結果を $\varepsilon-\delta$ 法で表わせば以下の様になる.

$$(3)\quad \left|\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}-u_0\right|=0<\varepsilon,\ (0<|\Delta t|<\delta)$$

次に z 座標について調べてみる.

$$\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}$$
$$=\frac{\{z_0+w_0(t_1+\Delta t-t_0)-\frac{1}{2}g(t_1+\Delta t-t_0)^2\}-\{z_0+w_0(t_1-t_0)-\frac{1}{2}g(t_1-t_0)^2\}}{(t_1+\Delta t)-t_1}$$
$$=w_0-g(t_1-t_0)-\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$$

これから次の表式が導ける.

$$(4)\quad \left|\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}-\{w_0-g(t_1-t_0)\}\right|=\frac{1}{2}g\,|\Delta t|<\frac{1}{2}g\cdot\delta<\varepsilon,$$
$$(0<|\Delta t|<\delta)$$

これから与えられた微小正数 ε に対して，今一つの微小正数 δ を不等式 $\delta<\dfrac{2\varepsilon}{g}$ を満たす様に選べば，上記不等式が必ず成立するのが判明した．この事を以って我々は「時刻 t_1 に於ける z 軸方向の速度は $w_0-g(t_1-t_0)$ に等しい」と捉えるのである.

一般に，或る変数を時間で微分した時の微分係数を，この変数の上に点（ドット）を付けて表わす事にする．座標 x に対しては，$\dot{x}$ は速度の x 成分を表わす.

$$(5)\quad \dot{x}\equiv\frac{d}{dt}x=f'(t)$$

速度の，x，y，z それぞれの軸方向の成分を u，v，w で表わす事にしよう．そうすれば，只今の表記に依って次の様に書き表わされるのが知れる.

$$(6)\quad u=\dot{x}=U(t)=u_0,\quad v=\dot{y}=V(t)=v_0,\quad w=\dot{z}=W(t)=w_0-g(t-t_0)$$

ここに $U(t)$，$V(t)$，$W(t)$ は，速度成分 u，v，w を与える時間 t の函数である．これらを時間で微分すれば加速度成分が得られる事になる.

$$(7)\quad \dot{u}=\ddot{x}=U'(t)=0,\quad \dot{v}=\ddot{y}=V'(t)=0,\quad \dot{w}=\ddot{z}=W'(t)=-g$$

ここで，「質量 m の物体に，外力 $\mathbf{F}$ が作用すると，加速度 α を生ずる」と言うニュートンの運動の法則を書き出して置く.

$$(8)\quad \alpha=\frac{\mathbf{F}}{m}$$

これから，ここで考えている運動物体は次の運動方程式に従って運動しているのが知れる.

$$\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta}{(\theta+\Delta\theta)-\theta}=\frac{2\cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}=\cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}$$

この先は，どの様に考えて行けば良いのであろう？「迷う事は無い．角度を弧度法で測って置けば，$\dfrac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\to 1$，$(\Delta\theta\to O)$ であるし，$\cos\left(\theta+\frac{\Delta\theta}{2}\right)\to\cos\theta$，$(\Delta\theta\to O)$ も明らかであるから，$\dfrac{d}{d\theta}\sin\theta=\cos\theta$ が得られるではないか」で良しとすべきか？　我々は，これを素朴な三角法から始めて，一つ一つ丁寧に見て行く事にする．　　　　（1994年２月20日）

＊ 前回（1992年11月号，p.337 下から７行目）で，ドゥスィッターの論文[1)]を正しく引用していなかった．ここにお詫びして，以下に正しい文章を引いて置く．

The first approximation leads thus to the ordinary Newtonian theory of gravitation ……

【参 考 文 献】

１）W. de Sitter「Monthly Notices of the Royal Astronomical Society」volume 76 p.705 (1916)