第804号（第73巻）　天界　1992年5月号

THE HEAVENS

天界5月号（第73巻，第804号）目次

Vol. 73, No. 804, May., 1992

天体力学入門講座(2)

理事　井上　猛　T. Inoue
（京都産大教授）

昨年の十月号に第1回目を出してから既に半年も経ってしまった．講座の形を取る以上，余り間を置くのは望ましい事ではない．お勧め下さった佐伯会長にも御迷惑をお掛けする事になってしまった．今後は間を空け過ぎない様に心して行きたい．

この半年の間には，予定していた内容も一段と整理されてより良いものになったと考えている．今回も未だ具体的な惑星運動を扱う処までは行く事が出来ない．確かな天文学の看板を掲げた以上，それに入る前にどうしても触れて置かなければならない事柄が幾つかあって，それを避けて通る訳には行かないからである．

以下に前回の「序の序　数学と云うもの」の後半を続けて行く事にする．用語「函数」は通常「関数」と書く事になっているが，敢えて「函数」と書く事をお許し頂きたい．

上では，数直線上の飛び飛びの数，自然数に応じて定まる数列の収束性を問題にして来た．以下に於いては，数直線上のすべての数，実数に対応して定まる函数の振舞を問題にして行く．この目的の為に，平面直交座標系 $O-xy$ を考える．独立変数を x とし，これに応じて定まる函数値を $f(x)$ で表わし y 軸上に目盛って行く．実数の組 $(x, f(x))$ を平面上の点に対応させれば，次の様なグラフが得られる．

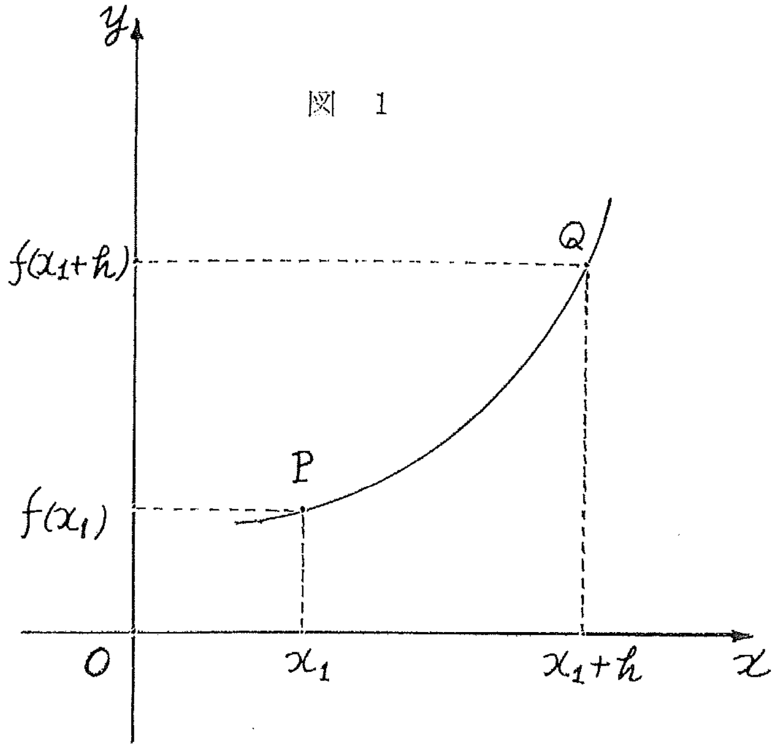

図 1

x 軸上の二個の値 x_1 および x_1+h に対する函数値 $f(x_1)$ および $f(x_1+h)$ を考える．グラフ上の二点 **P** および **Q** がこれらに対応する点である．この時，x_1 の方は値を一つ固定して考えるが，h の方はこれを変化させて行く事にする．従って点 **P** は不動であるが，点 **Q** の方はグラフ上を移動する訳である．

ここで，横座標の差 $(x_1+h)-x_1=h$ を Δx と表記して独立変分の増分と呼ぶ．同じく，縦座標の差 $f(x_1+h)-f(x_1)$ を $\Delta f(x_1)$ と表記して従属変数の増分と呼ぶ．実際には減少している様な場合にも増分と呼ぶのである．

図から明らかな様に $|\Delta f(x_1)|$ を小さくしたいと思ったならば，$|\Delta x|$ を小さくして行けば良い．ここの処を定量的に捉える目的で，次の様な表式を導入する．

$$(9)\quad |\Delta f(x_1)| < \varepsilon,\ (|\Delta x| < \delta_n,\ (N < n))$$

ここに δ_n は，先に(3)式で定義したものである．只今の(9)式は，次の様な場合を端的に表わしたものである．(i) 量 $|\Delta f(x_1)|$ を，与えられた微小正数 ε よりも小さくするためには，量 $|\Delta x|$ を δ_n よりも小さくして置けば良い；(ii) そのためには番号 n を，自然数 N よりも大きく選んで置けば良い；(iii) この時，N の値は ε の大きさに応じて定まる．つまり上の様な場合には，ε の値を一つ固定したならば N の値も一つ固定される事になり，従って δ_n もただ一つだけ用意すれば良い事になっている．そこでその様な δ_n を単に δ と表記する．そうして一つの微小量 ε に応じて，今一つの微小量 δ が定まると云う只今の捉え方を $\varepsilon-\delta$ 法と呼ぶ．先の $\varepsilon-N$ の方法と意味内容の両面で深い関係を持っている捉え方である．

この $\varepsilon-\delta$ 法を用いて，函数の連続性なるものに対する定義を述べて置く．与えられた微小正数 ε に対して，今一つの微小正数 δ を定めて点 x_1 での Δx に $|(x_1+\Delta x)-x_1| < \delta$ を課す．この時，不等式 $|\Delta f(x_1)| < \varepsilon$ が成り立つならば，函数 $f(x)$ は点 x_1 で連続であると言う．ここで言う連続と云うもの，切

れ目が無い，つながっていると云った日常経験的な理解に基づいたものである．ところが，常識的にはどう考えてもつながっているとは考えられない様な場合なのに，上記の連続性判定の方法でこれをみると連続であるとの判定の下る様な場合が出て来るのである[1)]．これは，数の不思議と連続性に関する我々の知見の未熟などが原因と考えられるが，ここではこれ以上は触れない事にする．

以上の準備の後に，函数の微分計算に移る事にする．先ず，縦座標の差を横座標の差で割ったもの $\Delta f(x_1) \div \Delta x$ を考える．これは平均変化率と呼ばれるものである．これが，微小な Δx に対してどの様な振舞をするかを問題にして行くのである．函数 $f(x)$ が点 x_1 で微分可能であると云う事を，次の表現で捉えることにする．

$$(10)\quad \left|\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{(x_1+h)-x_1}-A\right|<\varepsilon,\ (0<|h|<\delta)$$

ここで，A は x_1 のみに依存して定まる有限確定の量である．これは，点 x_1 に於ける函数 $f(x)$ の微分係数と呼ばれるもので，いろいろな形に書き表わされている[2)]．我々は，ただ一通りの表記 $f'(x_1)$ に限って，微分係数の意味で用いる事にする．正数 δ は，一般に ε および x_1 の値に応じて定まる様になっている．普通は，これ以上の事は言わないのであるが，我々独自の理解する処に従って，次の様にこれを捉える事にする．

$$(11)\quad \delta \leqq K\varepsilon^{\sigma}$$

上で K および σ は正の量で，ε には一切関係しない量である．x_1 の値には関係し得る．理解を助ける目的で，例題を一つ考えてみる．

◎函数微分計算の例．$f(x)=4\sqrt{x}$，$(x \geqq 0)$ の場合．

$A=\dfrac{2}{\sqrt{x_1}}$，$(x_1>0)$ としてみる．この時，与えられた ε に対して，δ を $\delta \leqq x_1\sqrt{x_1}\ \varepsilon$ と選んで置けば，次の不等式が必ず成立する様になっている．

$$\left|\frac{4\sqrt{x_1+h}-4\sqrt{x_1}}{(x_1+h)-x_1}-\frac{2}{\sqrt{x_1}}\right|<\varepsilon$$

以上から，量 $\dfrac{2}{\sqrt{x_1}}$ が函数 $4\sqrt{x}$ の点 x_1 に於ける微分係数である事が分る．更に，(11)式に於ける K および σ が，それぞれ $x_1\sqrt{x_1}$ および1であるのも知れる．

上の例で，量 $\dfrac{2}{\sqrt{x_1}}$ は x_1 が正でさえあれば，それ以外には何の条件も必要とはしない．この様な時には，函数 $f(x)=4\sqrt{x}$，$(x \geqq 0)$ に対して，一つの新たな函数 $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，$(x>0)$ を考える事が出来る．この時の $f'(x)$ は $f(x)$ の導函数と呼ばれるもので，我々の惑星運動に於いても重要な役割を演ずる

ものである．導函数の値 $f'(x)$ は，グラフ $y=f(x)$ 上の各点 x での接線の傾きを与えると考えられる．

ここで，独立変数 x の微分 dx なるものを考える．これは，我々が対象としている微小な世界での単位の長さと考えられるものである．更に正確に言うならば (i) 微小，(ii) 一定，(iii) 正値の三つの特性を有する基本的な量なのである．この dx は，$\varepsilon-\delta$ 法を用いる場合，常に $0<dx<\delta$ を満たす様に充分に小さく選んであるものとする．

微分 dx を用いて，函数 $f(x)$ の微分 $df(x)$ を次の式で定義する．

(12)　$df(x)=f'(x)\times dx$

これは，グラフ上に図示出来る量である．以下に於いては，独立変数の増分 Δx を一律に微分 dx に等しく取ってみる．

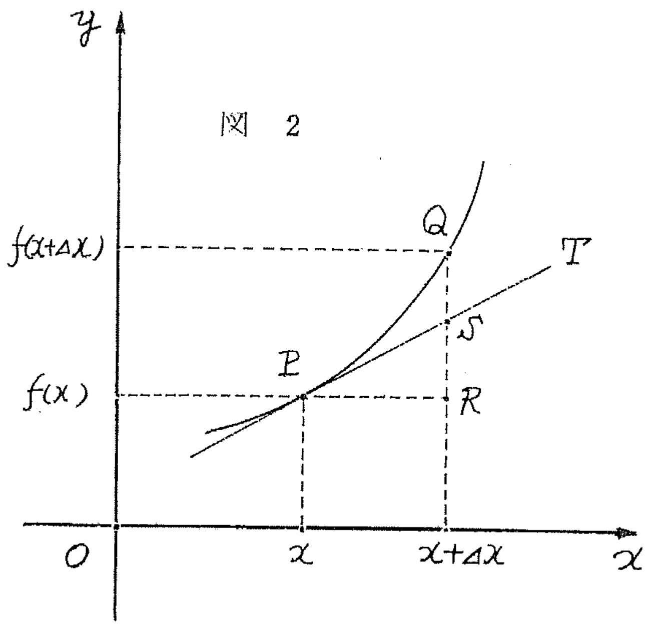

図　2

$\overline{\mathbf{PR}}=\Delta x=dx$　独立変数の微分

$\overline{\mathbf{RQ}}=\Delta f(x)$　従属変数の増分

$\overline{\mathbf{RS}}=df(x)$　従属変数の微分

微分 $df(x)$ の定義式を変形して $\dfrac{df(x)}{dx}=f'(x)$ と表わす事も可能である．この時，左辺は $df(x)$ 割る dx と言う微小な世界での割算を表わしているのである．

只今の量を用いて，微分可能の条件式(10)を書いてみる．

(13)　$\left|\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right|<\varepsilon,\ (0<|\Delta x|<\delta)$

分母を払うと $|\Delta f(x)-f'(x)\Delta x|<\varepsilon|\Delta x|$ となるが，只今は $|\Delta x|=\Delta x=dx<\delta$ としているので，次の不等式が得られる事になっている．

(14)　$|\Delta f(x)-df(x)|<\varepsilon\delta<K\varepsilon^{1+\sigma}$

これは本来なら増分で考えなければならない処を微分で考えても構わないと言う事を表わしている．我々の微分学に取って極めて好都合な事なのである．その事については後日みて行く事にしよう．　（1992年2月19日，つづく）

【参考文献】

1）小平邦彦　「解析入門Ｉ」　岩波書店　P.80　(1976)

2）高木貞治　「解析概論」　岩波書店　P.35　(1961)