第797号（第72巻）

天界

1991年10月号

THE HEAVENS

東亜天文学会総会での観測研究部各課の報告

観測研究部長　藪　保男　Y. Yabu

天界10月号（第72巻，第797号）目次

Vol. 72, No. 797, Oct., 1991

本会の会費は普通会員が年4,800円，本会の維持運営に協力する意味で年10,000円を納入される方は維持会員です．入会希望者は当会事務局（〒520-21 滋賀県大津市上田上桐生町289 山本天文台内）まで，なお天界旧号が若干在庫しています．希望者は御連絡下さい，原稿は編集者（〒664 伊丹市美鈴町2—57—18　佐伯恒夫）までお送り下さい．

天体力学入門講座(1)

井上　猛　T. Inoue
（京都産大教授）

三月末の評議員会の折り，佐伯会長から天体力学を講座風に書いてみてはどうかとのお誘いを受けた．天文学と云えば何となく宇宙論と云った風潮に対して，確かな学問としての天文学，「天体力学」の喧伝普及の必要性を痛感して居ったので希ってもない好機到来と一も

二も無くお引き受けした．

知識としての天体力学は勿論のこと，考え方の基本としての天体力学を，更には正しい天文学の発展を志向した天体力学を展開して行きたいと考えて居る．具体性を加味する上から太陽系天体の運動を扱って行く．依って立つ力学はニュートンのそれである．従って運動の三法則およびそれを記述する為の絶対空間絶対時間が登場して来る事になる．基本となる数学は微分学である．通常はこれらの基本概念や基礎数学はすべて既知既習であるとするが，ここではそうした立場は採らない事にした．必要な事項は可能な限り話の本流にこれを据え，細部に亘って論じて行きたいと考えて居る．

以下に於ては「数学と云うもの」，「ニュートン力学と云うもの」，「惑星運動の基本方程式」，「二体問題」，「要素変化の式」，「精密な位置推算」，「水星近日点前進の問題」を順を追って述べて行く事にする．

序の序　　数学と云うもの

天体力学に取って数学は不可欠である．ところが数学が惑星運動を初め自然理解に役立つのが何とも不思議な事だと言う人が居る．[1]また数学が天文学や物理学に先んじて優れた学問であると言った見方をする人も居る．いずれも事実を正しく捉えて居るとは言い難い．我々はより良く自然を理解しようとして諸種の学問を創り使い発展させて来て居るのであり，数学とてもまた例外ではない．数学に関して言うならば，日常生活で経験する種々の事物を理想化し抽象化して行って素朴な算術や幾何学を有用な知恵として獲得して行ったのである．抽象化がなされる為には，個々の物が持つ小さな差異はこれを無視してすべてを同一視すると云った思い切った事がなされなければならない．誤差を認める立場に立つ訳である．この時に認めるだけで終るのではなくして，誤差の大きさを正しく評価した上での認め方なのである．

その後この抽象化，体系化は極度に推進されて行った．その為に数学があたかも自然とは何の関わりもない，人間の思考の自由な産物に過ぎないと云った見方も生ずるに至ったのである．大きな間違いである．どんなに奇想天外と思われる理論であっても，それが数学である以上はその基となった具体的なモデルが必ず存在するのである．従って素朴な意味付けが必ず可能なのである．そうは言っても算術ですら既に高度の抽象化の産物であってみれば，その意味内容を一つのモデルに基づいて明解に述べるのは必ずしも容易な事ではない．数学基礎論で言うゲーデルの不完全性定理の証明にも算術が使われて居るのである[2]－1掛ける－1が＋1に等しいと云うのは中学校段階で教わるのでそれなりに納得の行く理由を考えた人も多い事であろう．しかし1×1が1に等しいのや，2×3＋7が13に等しいのはどうしてかと問われて返答に窮しない人は寧ろ少ないのではなかろうか．余りにも当たり前過ぎてその理由など考えた事もないと云うのが正直なところであろう．

既に完成の域に達したと思われる現代の微分学も未だ不完全なところを内包して居るのであって，我々の手で改良改善を試み，更により良いものにして行かな

ければならないのである．百五十年前の当時の現代人コーシー達もこうした観点に立ってあれこれ熟慮に熟慮を重ねて居たのである．[3]このコーシーとても創始者のライプニッツやニュートンに下ること既に百五十年なのであった．

数学全般に亘って重要な役割を演ずるのが数直線である．これは真直ぐであるとか曲って居ないとかの日常語から出発して理想化の後に獲得された抽象概念である．一様均質で切れ目のない広がりである．但し幅も太さも持たずあるのは長さのみである．この長さと云うものもそれ以前に真直ぐと云うのがあって初めて捉える事の出来るものなのである．これがユークリッド幾何，ユークリッド空間の基本的構成要素たる直線である事や，兼ねて座標軸となるものである等と云った事は先刻承知の諒解事項であるとして以下の話を進めて行く事にする．

先ずは我々の微分学にとって基本的となる収束概念について触れて置く．

自然数の次の様な配列を考える．

（1）　$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots$

これらは数直線上原点Oから等間隔に1，2，3，…と目盛って行った点として位置付ける事も出来る．ここでは上に配列したものを自然数からなる無限数列と捉える事にして，これを $\{n\}$ と表記する事にしよう．この数列の元（ゲン）の間には次の大小関係が存在する．

（2）　$1<2<3<\cdots\ <n<n+1<\cdots$

これで見れば自然数には果てがなく，どこまでも増大して行くのが分る．この事を以って数列 $\{n\}$ は発散すると言う．この発散性に着目すれば逆に収束性なるものについて実りある議論が出来る事になって居るのである．

自然数の逆数からなる数列 $\{\delta_n\}$ を考えてみる．

（3）　$\delta_n=\dfrac{1}{n},\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

ここで δ_n はすべて正であるが，n を限りなく増大させて行く時 δ_n はどこまでも小さくなって行かざるを得ない様になって居る．これを指して n を無限大にする時に δ_n はゼロに収束する，と云った言い方をしたりする．しかし無限大にすると云うのは，実際上不可能な事である．現実に扱えるのが有限な量に限られるのであってみれば，我々の思考そのものも有限を対象とする時に最も有効に働くものである．

こうした折りに ε-N の方法なるものが登場して来る事になる．先ず小さな正の数 ε なるものを考える．これは数直線上原点Oからの微小な距離と考えても良い．或いは一種の誤差と考えても良いが，大事なのは値を一つ固定すると云う事である．この値に対して一つの自然数 N を次の様に定める事が出来る．

（4）　$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$

ここに記号〔　〕は一つの実数xが

（5）　$x=m+\sigma$，（m：整数；$0\leqq\sigma<1$）

と表わされる時〔x〕$=m$である事を表わすガウスの記号と呼ばれるものである簡単にいえば，小数点以下を除き，整数部分のみを取り出すのである．従って次のことは明らかである．

（6）　$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\leqq\dfrac{1}{\varepsilon}<\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1=N$

この時Nより大きな番号nを持ったδ_nはすべて次の不等式を満足する様になって居る．

（7）　$\delta_n<\varepsilon$，（$N<n$）

何となれば，$N<n$であるから$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}$であり，(3)と(6)式から$\dfrac{1}{n}=\delta_n$，$\dfrac{1}{N}<\varepsilon$が成立するからである．一旦固定したこの$\varepsilon$の値を，より小さな値に選び直せば(4)式から知れる様に，それに応じてより大きなNが対応して来るのである．この事実に基づいて我々は数列$\{\delta_n\}$がゼロに収束するととらえるのである．この様にε-Nの方法は有限の量εおよびNによって無限個のものを一括してしかも厳密に扱う事が出来ると云う大きな特長を有して居るのである．

上で見たのは自然数のみからなる特殊な数列でしかない．しかし一群の実数に自然数$1, 2, \cdots, n, \cdots$を脚符に配して$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$なるものを作ってみればこれは任意の数列$\{a_n\}$を考えた事になって居る．しかもこの数列の収束性発散性を調べるのに$\{\delta_n\}$や$\{n\}$に関する知見がそのまま適用可能になって居るのである．数列$\{a_n\}$の収束性を調べるには，一つの定数aを設定して$|a_n-a|$，（$n=1, 2, \cdots$）を作り，これと数列$\{\delta_n\}$とを比較してみれば良い．即ち次の関係

（8）　$|a_n-a|<\varepsilon$，（$N<n$）

が成立するならば，(7)式との比較から$\{a_n\}$がaに収束すると云うのが知れる事になる．この時の定数aは，$\{a_n\}$の極限と呼ばれて居る．

◎数列収束判定の例．　$a_n=\dfrac{2n+3}{n+1}$，（$n=1, 2, \cdots$）の場合．

$a=2$としてみれば$N<n$に対して$a_n-a=\dfrac{2n+3}{n+1}-2=\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{N}$となる．そこで$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$と選んで置けば$0<a_n-a<\varepsilon$，（$N<n$）が成立する．よって$\{a_n\}$が2に収束すると云うのが知れる．

（1991年8月17日）

【参考文献】

1）M.クライン「何のための数学か」　紀伊國屋書店　P.216（1987）

2）E.ナーゲル，J.R.ニューマン「数学から超数学へ」　ゲーテルの証明　白揚社　P.89（1968）

3）「Oeuvres Complètes d'A. Cauchy」　Série Ⅰ，Tome Ⅷ Gauthier-Villars　P.11（1898）