天体力学の楽しみ

井上　猛

近代天文学の夜明けは天体力学の誕生と共に訪れたと言っても過言ではない。この天体力学はニュートン力学の忠実なる信奉者であって、万有引力の下での質点の運動を論じるのを中心課題としている。今世紀初頭には相対性理論や量子力学の誕生を見、新しい天文学の進歩発展を見る事になるが、これらも奥深いところでは天体力学の成果に大いに負うているのである。

天体力学を学ぶ醍醐味はその精確な予報性にある。太陽や惑星の暦を初め日食や月食の予報、更には彗星の回帰の予報等々枚挙に暇がない。こうした事から我々は天界の現象に法則の存する事を知り、人智の自然界に及び得る事を知ったのである。天体力学には純粋数学的色彩の濃い問題も沢山ある。その多くは解けない。解けないが故に人を魅了し、人の知的好奇心を駆り立てずには置かないのである。いずれにしても真に天体力学の楽しさを味わう為には数学に親しまなければならない。その辺の事情をも解説する目的で三体問題を例に選び、話の出発に据えてみた。

1．三体問題の運動方程式

ニュートンの力学法則を記述する為には絶対空間、絶対時間と呼ばれている素朴な三次元と一次元のユークリッド空間を考えなければならない。絶対空間の原点をOとし、3個の質点をP_1, P_2, P_3, それらの位置ベクトルを$\vec{\rho_1}$, $\vec{\rho_2}$, $\vec{\rho_3}$とする(図1)。

図1

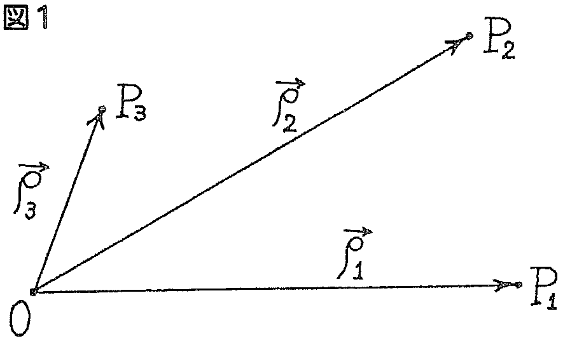
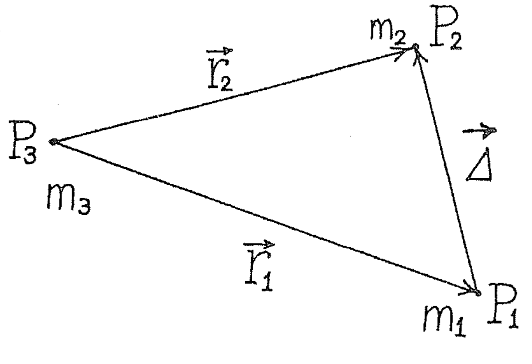


図2



万有引力定数をG、質量をそれぞれm_1, m_2, m_3とする時ニュートンの運動法則は次の形に書かれる：

$$(1)\quad m_1\frac{d^2\vec{\rho_1}}{dt^2}=\frac{Gm_2m_1}{|\vec{\rho_2}-\vec{\rho_1}|^2}\cdot\frac{\vec{\rho_2}-\vec{\rho_1}}{|\vec{\rho_2}-\vec{\rho_1}|}+\vec{0}+\frac{Gm_3m_1}{|\vec{\rho_3}-\vec{\rho_1}|^2}\cdot\frac{\vec{\rho_3}-\vec{\rho_1}}{|\vec{\rho_3}-\vec{\rho_1}|},$$

$$(2)\quad m_2\frac{d^2\vec{\rho_2}}{dt^2}=\frac{Gm_1m_2}{|\vec{\rho_1}-\vec{\rho_2}|^2}\cdot\frac{\vec{\rho_1}-\vec{\rho_2}}{|\vec{\rho_1}-\vec{\rho_2}|}+\frac{Gm_3m_2}{|\vec{\rho_3}-\vec{\rho_2}|^2}\cdot\frac{\vec{\rho_3}-\vec{\rho_2}}{|\vec{\rho_3}-\vec{\rho_2}|}+\vec{0},$$

$$(3)\quad m_3\frac{d^2\vec{\rho_3}}{dt^2}=\vec{0}+\frac{Gm_2m_3}{|\vec{\rho_2}-\vec{\rho_3}|^2}\cdot\frac{\vec{\rho_3}-\vec{\rho_2}}{|\vec{\rho_3}-\vec{\rho_2}|}+\frac{Gm_1m_3}{|\vec{\rho_1}-\vec{\rho_3}|^2}\cdot\frac{\vec{\rho_1}-\vec{\rho_3}}{|\vec{\rho_1}-\vec{\rho_3}|}.$$

ここで$|\vec{\rho_2}-\vec{\rho_1}|$は二個の質点$P_1$, P_2間の距離を表わす。

絶対空間の量$\vec{\rho_1}, \vec{\rho_2}, \vec{\rho_3}$を用いて書かれた上の運動方程式は、絶対空間の原点などという到底知る事のできないものを前提としているのでその限りでは机上の空論でしか

ない。しかし一度上の形の表式を導いて置いたならば、後は単なる式変形、変数変換のみで意味のある方程式系に移行する事ができるのである。これあるが故に形而上学に過ぎぬと思われるニュートン力学も真に中身のある物理学となり得るのである。この事を見てみよう。

質点P_3に相対的な質点P_1, P_2の位置ベクトルを$\vec{r_1}, \vec{r_2}$としてこれらに対する運動方程式を導く(図2)。この時、表式は惑星運動型の相対運動方程式と呼ばれる：

$$(4)\quad \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} + \frac{G(m_3+m_1)}{r_1^2}\cdot\frac{\vec{r_1}}{r_1} = \frac{Gm_2}{\Delta^2}\cdot\frac{\vec{\Delta}}{\Delta} + \frac{Gm_2}{r_2^2}\cdot\frac{-\vec{r_2}}{r_2},$$

$$(5)\quad \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} + \frac{G(m_3+m_2)}{r_2^2}\cdot\frac{\vec{r_2}}{r_2} = \frac{Gm_1}{\Delta^2}\cdot\frac{-\vec{\Delta}}{\Delta} + \frac{Gm_1}{r_1^2}\cdot\frac{-\vec{r_1}}{r_1};$$

$$(6)\quad \vec{r_1} = \vec{\rho_1} - \vec{\rho_3},\quad \vec{r_2} = \vec{\rho_2} - \vec{\rho_3};\quad \vec{\Delta} = \vec{\rho_2} - \vec{\rho_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1};$$

$$(7)\quad r_1 = |\vec{r_1}|,\quad r_2 = |\vec{r_2}|;\quad \Delta = |\vec{\Delta}|.$$

これで見れば明らかな様に絶対空間の量は一切顔を出してはいない。ここへの移行に際しては何らの仮定も何らの近似も施してはいない。かくして絶対空間なるものは完全に忘れ去る事ができるのである。

上の(4)、(5)両式はm_1, m_2が共に0ではないとして導かれたものである。仮にm_2が0であるとすれば(5)式は消失、(4)式は次の様になる(図3)：

$$(8)\quad \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} + \frac{G(m_3+m_1)}{r_1^2}\cdot\frac{\vec{r_1}}{r_1} = \vec{0}.$$

図3

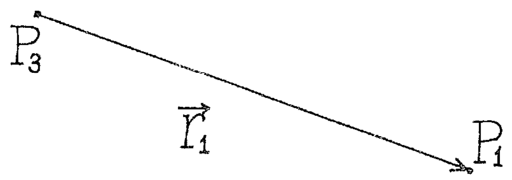
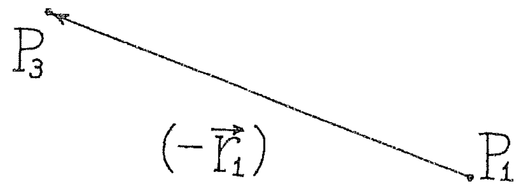


図4



これはP_3, P_1二質点のみの場合のP_3に相対的なP_1の運動を表わす方程式で、二体問題の基本方程式とでもいうべきものである。この場合P_1はP_3を焦点とする二次曲線を描くのであった。ところで(8)式の$\vec{r_1}$は$(-\vec{r_1})$に置き換えてもそのまま成り立つ：

$$(9)\quad \frac{d^2(-\vec{r_1})}{dt^2} + \frac{G(m_3+m_1)}{r_1^2}\cdot\frac{(-\vec{r_1})}{r_1} = \vec{0}.$$

これは図4からも明らかな様に、P_1に相対的なP_3の運動を表わす方程式に外ならない。ガリレオもこの事を知っていたなら地球が回っていても太陽が回っていても同じ事だとして命を懸けてまで法廷で争いなどしなかったであろう。彼が死んだ年にニュートンが生まれその後にこの事を明らかにしたのであるからそれは無理からぬ事ではあった。

2．ラグランジュの特殊解

先の方程式(4)、(5)に、三体P_1, P_2, P_3が正三角形を形作る為の条件：$r_2 = r_1$, $\Delta = r_1$（図5）を課してみる：

$$(10)\quad \frac{d^2\vec{r_1}}{dt_2} + \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{r_1^2}\cdot\frac{\vec{r_1}}{r_1} = \vec{0}.$$

$$(11)\quad \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} + \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{r_2^2}\cdot\frac{\vec{r_2}}{r_2} = \vec{0}.$$

これはP_1,P_2のそれぞれがP_3と二体問題の系を形成している事を表わしている。この事から、P_1,P_2がP_3を焦点とする二次曲線を描いていれば、三体が常に正三角形を形作るのが知れる(図６)。

図５

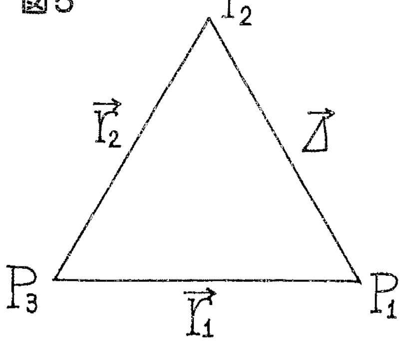
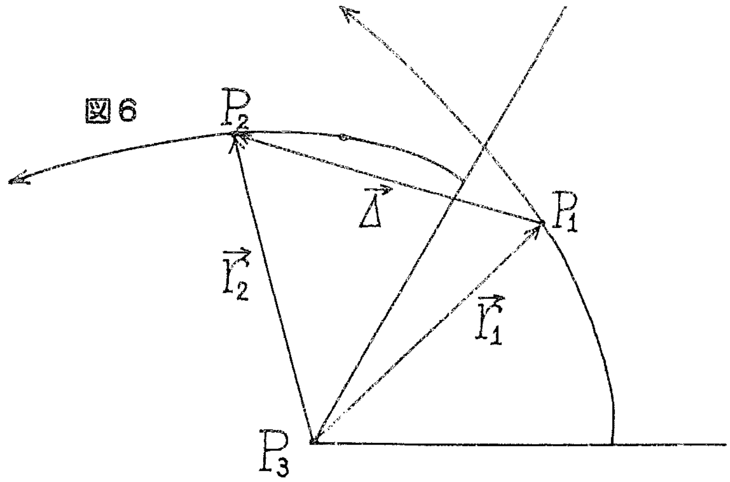


図６



この正三角形解を1772年に公表する時ラグランジュはわざわざ「単なる好奇心からに過ぎない」と断わっている。当時具体的な例が知られていなかったからである。1906年２月ヴォルフが一つの小惑星を発見、それの軌道をベルベリッヒが計算、これが太陽・木星と共に正三角形に近い位置にある事をシャルリエが５月に指摘、今日正三角形解の具体例として有名なトロヤ群の第１号はこんな風にして発見されたのである。

三体P_1,P_2,P_3が図７の様に一直線上に並んで運動しているとしよう。

図７

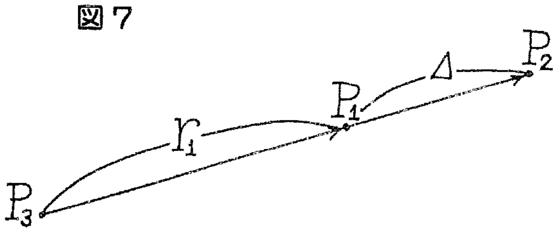
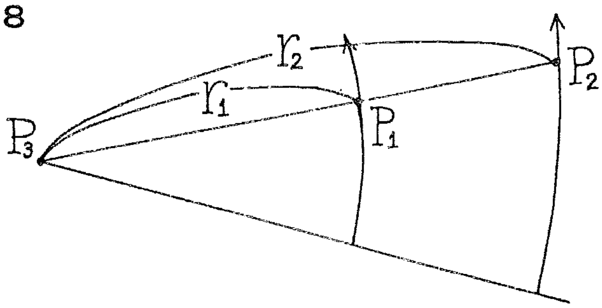


図８



距離Δとr_1の比を s と置いて先の(4)、(5)式を書いてみる：

$$(12)\quad \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} + \frac{GM_1}{r_1^2}\cdot\frac{\vec{r_1}}{r_1} = \vec{0},\quad M_1 = m_3+m_1+m_2\left\{\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{s^2}\right\},$$

$$(13)\quad \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} + \frac{GM_2}{r_2^2}\cdot\frac{\vec{r_2}}{r_2} = \vec{0},\quad M_2 = m_3+m_2+m_1\left\{(1+\frac{1}{s})^2 + (1+s)^2\right\}.$$

これまた二体問題の基本方程式に外ならず、P_1,P_2がP_3を焦点とする二次曲線上を運動していれば、直線上に並んだ運動の可能なる事が知れた(図８)。これが直線解である。但し比 s は次の方程式を満足する正の根でなければならない：

オーストリア、ラムザウで開かれた天体力学シンポジウムの帰途、サルツブルク近くのシュラートミンク駅で。左からオンラール、ジャップ、筆者、メッセイジ、マルシャル（1984年3月31日）

$$(m_3+m_1)s^5+(3m_3+2m_1)s^4+(3m_3+m_1)s^3-(m_1+3m_2)s^2+ \tag{14}$$
$$-(2m_1+3m_2)s-(m_1+m_2)=0,\quad \left(s=\frac{\Delta}{m_1}\right).$$

この方程式の各項に$s^{-\frac{5}{2}}$を掛けて整頓すると次の形になる：

$$(m_1+m_3)s^{\frac{5}{2}}+(2m_1+3m_3)s^{\frac{3}{2}}+(m_1+3m_3)s^{\frac{1}{2}}+ \tag{15}$$
$$-(m_1+m_2)s^{-\frac{5}{2}}-(2m_1+3m_2)s^{-\frac{3}{2}}-(m_1+3m_2)s^{-\frac{1}{3}}=0.$$

単なる偶然に過ぎないのであろうが、それにしても美しい形をしているではないか。

三体の質量m_3, m_1, m_2をそれぞれ太陽、地球、月のそれに等しいと置いて(14)式を解いてみる。地球の質量を単位に選べば、$m_3=333593$、$m_1=1.00000$、$m_2=0.0123457$であるから、$s=0.0100723$を得る。現実の月に対するsの値は0.00256967であるから、もしも月が今よりも約四倍遠方にあれば、太陽と正反対の天空に不動の満月が輝く事になる。これをラグランジュの永遠の満月と呼んでいる。図7でP_2を地球、P_1を月と考えると方程式は少しだけ変ってくるが、同様にして$s=0.0100043$を得る。この場合には永遠の新月が永遠の金環食を起す事になる。もしもこの位置に地球半径の二倍強の月があったならば、地球上の至る所で永遠の皆既日食が起る事になって、永久に太陽を見る事のない世界が現出することであろう。

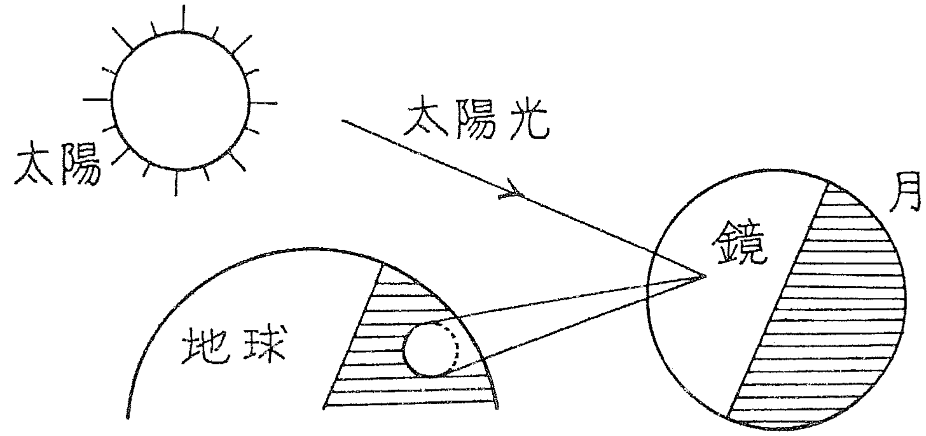
3．空想科学小説の世界

永遠の満月の位置に大きな反射鏡を設置し、遠隔操作によって太陽の光を地上の好みの場所に反射させる事ができる様にする。或いは永遠の新月の位置に地球大の遮光板を設置し、これまた自由に傾きが変えられる様にする。そうすれば地球規模での寒暖の調節も容易なものとなって、時折り話題に上る地球の寒冷化や温暖化の問題も一挙に解決する事になる。人類の幸福に寄与するところ極めて大というべきであろう。しかしこの種の技術が一部の悪意を持った人間の手に渡ったとしたらどうなるであろう。恐るべき事態に立ち至ること必定である。

上に述べた様な話は何も直線解に限定する事はない。事実クラヴリーとグレイとは人工衛星を用いたSolar Space Power Systemsなる太陽エネルギー利用計画を

1982年に提案している。面積50km²、重量4万トンもの超大型装置を静止衛星軌道上に打ち上げて5000メガワットの電力を得ようというものである。これに対してマルシャルは月面上に面積2000km²の平面鏡を建造して3000メガワットに達する照明を得ようと提言している(図9)。

図9



彼はこれを建造するのに月の物質を用い、鏡面の向きを変えるのには太陽のエネルギーを利用、太陽光の当らない半月間は望遠鏡として有効利用すれば良いと言っている。1983年の事で、名付けて Moon-Day Project という。

以上はいずれの場合も現在の自然科学、宇宙技術の進歩・発展の度合からすれば実現可能となるものばかりである。同一の技術であってもそれを使う人間次第で人類繁栄を促進したり人類滅亡を招来したり両極端の働きをしてしまう。人間の資質向上に努めねばならぬ所以である。

4．摂動的手法

三体問題も先の特殊解の場合を除いてはこれを解く事ができない。勢い近似的な方法に頼らざるを得なくなってくる。端的に示す目的で次の様な例を考える：

$$(16)\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon Z\left(x, \frac{dx}{dt}\,;\, t\right), \qquad (\omega,\ \varepsilon\text{：正の定数}).$$

ここに ε は微小量で、Z はテーラー展開可能であると仮定する。これが x について容易に解ける場合は別として一般には先ず $\varepsilon = 0$ と置いて問題を解き、然(しか)る後に $\varepsilon \neq 0$ の与えられた問題に立ち向かうのである。

与えられた方程式(16)に $\varepsilon = 0$ を代入し更に式を**一階連立の形に書いて置く**：

$$(17)\quad \frac{dx}{dt} = \omega y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega x\,.$$

これの解は直ちに書き下す事ができて次の様になる：

$$(18)\quad x = \varphi(A, B;\, t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$
$$(19)\quad y = \psi(A, B;\, t) = -A\sin\omega t + B\cos\omega t. \qquad (A, B\text{：任意定数})$$

ラグランジュの定数変化の方法では只今得られた解の形：$\varphi(A, B;\, t)$, $\psi(A, B;\, t)$

を$\varepsilon \neq 0$の下でも崩さずに使うのである。ただ先に定数であったA，B二量をtに応じて変化すると考えるのである。この事を忠実に実行に移せば、次の微分方程式に到達する事になる：

(20) $$\frac{dA}{dt} = -\varepsilon \sin\omega t Z^{*}(A, B; t),$$

(21) $$\frac{dB}{dt} = \varepsilon \cos\omega t Z^{*}(A, B; t);$$

(22) $$Z^{*}(A, B; t) = Z(\varphi(A, B; t), \psi(A, B; t); t).$$

天体力学の場合には定数A，Bに相当するものが軌道要素であるところから、上式を要素変化の式と呼んでいる。この時の右辺を摂動と呼ぶが、これが存在する為に定数であったものが変化する様になってくるのである。微分方程式論の立場からすれば、(20)、(21)両式は(16)式と完全に同等なものであって、何の解決にもなってはいないのである。しかし近似論の立場からするならば、εが微小であるという事が幸いして、一歩も二歩も前進した事になっているのである。それは逐次近似の方法によって、次第に真の解に接近して行く事ができると考えられるからである。ここに摂動的手法と呼ばれるものが導入され、摂動論と呼ばれるものが確立されて行く事になるのである。

運動学上の天文現象を詳細に亘って説明する為にはこの摂動的手法は不可欠である。1781年ハーシェルによって発見された天王星は、この方法によってもその運動がどうしても説明され得なかった。ルヴェリエはこれが未知惑星の存在によるものとして研究に着手、長い摂動計算の後に1846年見事に海王星の発見を導いたのであった。これに気を良くしたルヴェリエは、水星近日点の前進運動に於ける理論と観測の不一致から、再度未知惑星の存在を仮定したのであった。結果は彼の予想に反してニュートン力学の不完全性がその原因という事になった。そうしてそれ以後はニュートン力学に取って代って相対性理論が一層精密な力学法則を与えるものであるとして、現在では天体暦等もその枠組の中で書かれる方向に推移して行っている。

ところで、天王星の運動は海王星の影響を考慮に入れて計算しても完全には説明され得なかった。それが原因で冥王星の発見が促進されたのは良く知られた事である。しかし発見された冥王星の質量は余りにも小さ過ぎた。そんな事もあって第X惑星の存在が予言されたりもしてきている。この天王星の運動が説明できないのは未知惑星の存在の為か、もしくは相対性理論の不完全さの為かのいずれかであろうと、1986年のこと、サイデルマンが述べている。天体力学というものは単に天体の運動を説明しさえすれば良いのではなくして、力学法則の根本をも問い続けて行かなければならないのである。これもまた天体力学を学ぶ大きな楽しみの一つなのである。

（いのうえ・たけし：京都産業大学）

大阪市立科学館 友の会 会報　月刊「うちゅう」

1987 / Aug. Vol.4 No.5 p.6~p.11

科学館 http://www.sci－museum.jp

友の会 http://www.sci－museum.kita.osaka.jp/~tomonokai/