天 体 力 学 入 門 講 座 (最終回)

水星近日点に於ける余剰の前進運動の怪

井上 猛　T. Inoue
（滋賀県 湖南市）

現在では既に解決済みと考えられて居る余剰の前進運動の問題！然し問題の本質は正しく捉えられては居ない。我々の把捉を通して事の真相に迫ってみる事にしよう。

信頼の擱ける文献からの引用を試みる [1)]

水星の近日点前進

水星の公転軌道の近日点が公転方向に移動する現象．水星の近日点は 100 年間におよそ $9'34''$ 前進する．そのほとんど大部分はほかの惑星の摂動によるものとして説明できるが，それではどうしても説明できないものとして約 $43''$ 残る．これを最初に指摘したのは 1859 年ルヴェリエ U. J. J. Le Verrier である．

その後，　ニューカム S.Newcomb がこの問題を再検討し，ルヴェリエの発見が正しいことを確認した．

(途中省略)

1916 年 発表された一般相対性理論によると, 太陽付近の時空間は太陽によって歪められており, その中を水星が運動するから近日点前進が起ると説明される．その前進量は理論によると, 100 年間に $43''.06$ である．

近日点の前進は上記文献の説明に基づき概略を述べるなら次の様になる ([1)]p.164)。

惑星・小惑星の公転軌道の近日点が公転方向に移動する現象で二つの部分から成る。一つは他の惑星の摂動に依るもの、もう一つは太陽付近の時空間の歪みが原因で生ずる。後者の場合の**前進量** $\delta\varpi$ は次式で与えられる：

$$\boxed{\delta\varpi = \frac{6\pi m}{p}}$$

$$m \equiv \frac{GM_{太陽}}{c^2}\,, \quad ; p = a(1-e^2)$$

G：万有引力の定数、$M_{太陽}$：太陽の質量、c：光速度；a：軌道半長径、e：軌道離心率

只今の $\delta\varpi$ が 100 年間に 43 秒角を与えるのである。

上記の量 $\delta\varpi$ は一般相対性理論に於ける一体問題の Schwarzschild の解が与えるものである [2)]。

....

我々は Le Verrier の研究に誤りが存在して居りそれを修正すれば件(くだん)の前進運動など在りはしないと云う事を指摘した [3)]。

併せて Schwarzschild の一体問題が Newton 力学の二体問題の別表現に過ぎないと云う事も指摘した (平面問題) [4)]。

Newton 力学に於ける動径と経度を (r,ϕ) と表記し Schwarzschild の座標系に於てはこれらを (R,Φ) と表記する。

Newton 力学の二体問題の運動方程式は次式で与えられる：

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0$$

$$\mu = G(m_{太陽} + m)$$
$$\phi = \varpi + f$$

これに対し Schwarzschild の一体問題の運動方程式は次の様になる ([2] p.82)：

$$\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{R^2} =$$
$$= \frac{2m\mu}{R^3} + \frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - 2m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\Phi}{dt}\right) = 2m\frac{dR}{dt}\frac{d\Phi}{dt}$$

当然ながら Newton 力学の運動方程式を記述する座標 $(r, \phi\,; t)$ と Schwarzschild の運動方程式を記述する座標 $(R,\Phi; t)$ の間には**差**が存在する。これを次の形に捉える：

$$R = r + m\rho$$
$$\Phi = \phi + m\sigma$$

時間に関しては Newton 力学に於ける絶対時間 t と Schwarzschild の系に於ける座標時 t とを同一視する。

微小量 m の一次の大きさに限れば**差**は次式で与えられる：

$$m\rho \simeq m\left\{\frac{2}{e^2}(1-\xi) - \frac{3u}{\eta}e\sin f\right\}$$

$$m\sigma \simeq \frac{m}{p}\left\{3\left(f - \frac{u}{\eta}\xi^2\right) + \frac{2+2\xi+e^2}{e^2}e\sin f\right\}$$

$$\xi \equiv \frac{p}{r} = 1 + e\cos f\ ,\ \eta = \sqrt{1-e^2}$$

f ：真近点離角　，u ：離心近点離角

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin f}{1+e\cos f} = \frac{\eta}{\xi}\sin f$$

差 $m\rho$ 及び $m\sigma$ の導出に付いては 報告したものが在る [4] のでここでは触れずこの**差**が Newton 力学の系と Schwarzschild の系とを結び付けて居るのを確認して行く。

今後も総ての議論が微小量 m の一次の大きさに限定してのものであるからそれに向けての近似関係を導いて置く。

$$R\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 = (r+m\rho)\left(\frac{d\phi}{dt} + m\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 =$$
$$\simeq (r+m\rho)\left\{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\phi}{dt}\times m\frac{d\sigma}{dt}\right\} =$$
$$\simeq r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + m\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + 2mr\frac{d\phi}{dt}\frac{d\sigma}{dt}$$

$$\frac{\mu}{R^2} = \frac{\mu}{(r+m\rho)^2} = \frac{\mu}{r^2}\left(1+\frac{m\rho}{r}\right)^{-2} =$$
$$\simeq \frac{\mu}{r^2}\left(1 - \frac{2m\rho}{r}\right) = \frac{\mu}{r^2} - \frac{2m\mu\rho}{r^3}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\frac{2m\mu}{R^3} + \frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - 2m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 =$$
$$\simeq \frac{2m\mu}{r^3} + \frac{3m}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2m\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\Phi}{dt}\right) =$$
$$\simeq \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right) + m\frac{d}{dt}\left(2\rho\, r\frac{d\phi}{dt} + r^2\frac{d\sigma}{dt}\right)$$

$$2m\frac{dR}{dt}\frac{d\Phi}{dt} \simeq 2m\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{n\xi}{\eta^2}$ は既知とするも $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{n\xi^2}{\eta^3}$ は解説が必要である。$n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{da(1-e\cos u)}{dt} = ae\sin u\frac{du}{dt} =$$
$$= ae\times\frac{\eta}{\xi}\sin f\times\frac{n\xi}{\eta^2} = \frac{na}{\eta}e\sin f$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{p}{r^2}\frac{dr}{dt} = -e\sin f\frac{df}{dt}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\xi^2}{p}\times\frac{na}{\eta}e\sin f =$$
$$= -\frac{\xi^2}{a\eta^2}\frac{na}{\eta}e\sin f = -e\sin f\frac{df}{dt}$$

$$\frac{n\xi^2}{\eta^3} = \frac{df}{dt}$$

先ずは動径に付いて見てみる。

$$\frac{d^2R}{dt^2}-R\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{R^2}-\left[\frac{2m\mu}{R^3}+\frac{3m}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-2m\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\frac{d^2r}{dt^2}+m\frac{d^2\rho}{dt^2}\right\}-\left\{r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+m\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+2mr\frac{d\phi}{dt}\frac{d\sigma}{dt}\right\}+\left\{\frac{\mu}{r^2}-\frac{2m\mu\rho}{r^3}\right\}+$$
$$-\left[\frac{2m\mu}{r^3}+\frac{3m}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-2m\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r^2}+m\left\{\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2-2r\frac{d\phi}{dt}\frac{d\sigma}{dt}-\frac{2\mu\rho}{r^3}\right\}+$$
$$-m\left[\frac{2\mu}{r^3}+\frac{3}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]=0$$

ここで係数に m を有する項を抽出する。

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2-2r\frac{d\phi}{dt}\frac{d\sigma}{dt}-\frac{2\mu\rho}{r^3}-\frac{2\mu}{r^3}-\frac{3}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

ここに先の**差**を代入して計算すれば**零**になる。従って Newton 力学の二体問題の方程式：$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r^2}=0$ が得られる事になり我々の主張の正当性が裏付けられることになる。これを確認する計算を行なう。有用な予備計算を列挙して置く。

$$\frac{d\xi}{dt}=-\frac{n\xi^2}{\eta^3}e\sin f$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{n\xi}{\eta^2}$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{df}{dt}=\frac{n\xi^2}{\eta^3}$$

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{e^2}(1-\xi)-\frac{3u}{\eta}e\sin f\right\}=-\frac{2}{e^2}\frac{d\xi}{dt}-\frac{3}{\eta}\frac{du}{dt}e\sin f-\frac{3u}{\eta}e\cos f\frac{df}{dt}=$$
$$=\frac{n}{\eta^4}(-3\xi^3+3\xi^2)u+\frac{n}{e^2\eta^3}(2\xi^2-3e^2\xi)e\sin f$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{\mu}{e^2p^3}\left\{6\xi^5-(10+9e^2)\xi^4+(4+8e^2)\xi^3-3e^2\eta^2\xi^2\right\}+\frac{\mu}{\eta p^3}(9\xi^4-6\xi^3)u\cdot e\sin f$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{n}{e^2\eta^3p}\left\{4\xi^4-(4+2e^2)\xi^3+0\times\xi^2\right\}+\frac{6n}{\eta^4p}\xi^3u\cdot e\sin f$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{na}{\eta}e\sin f$$

$$n^2=\frac{\mu}{a^3}\quad;\quad p=a\eta^2\quad;\quad (e\sin f)^2=-\xi^2+2\xi-\eta^2$$

準備が整ったので係数に m を有する量の計算に取り掛かる。

$$\frac{\mu}{e^2p^3}\left\{6\xi^5-(10+9e^2)\xi^4+(4+8e^2)\xi^3-3e^2\eta^2\xi^2\right\}+\frac{\mu}{\eta p^3}(9\xi^4-6\xi^3)u\cdot e\sin f+$$

$$-\left\{\frac{2}{e^2}(1-\xi)-\frac{3u}{\eta}e\sin f\right\}\frac{n^2\xi^4}{\eta^6}-2\frac{p}{\xi}\frac{n\xi^2}{\eta^3}\left[\frac{n}{e^2\eta^3p}\left\{4\xi^4-(4+2e^2)\xi^3\right\}+\frac{6n}{\eta^4p}\xi^3u\cdot e\sin f\right]+$$

$$-2\mu\frac{\xi^3}{p^3}\left\{\frac{2}{e^2}(1-\xi)-\frac{3u}{\eta}e\sin f\right\}-2\mu\frac{\xi^3}{p^3}-3\frac{\xi^2}{p^2}\frac{n^2a^2}{\eta^2}(e\sin f)^2+2\frac{n^2\xi^4}{\eta^6}=$$

$$=\frac{\mu}{e^2p^3}\left[\left\{6\xi^5-(10+9e^2)\xi^4+(4+8e^2)\xi^3-3e^2\eta^2\xi^2\right\}+(-2\xi^4+2\xi^5)+\right]+$$

$$+\frac{\mu}{e^2p^3}\left[\left\{-8\xi^5+(8+4e^2)\xi^4\right\}+(4\xi^4-4\xi^3)-2e^2\xi^3+e^2(3\xi^4-6\xi^3+3\eta^2\xi^2)+2e^2\xi^4\right]+$$

$$+\frac{\mu}{\eta p^3}\left\{(9\xi^4-6\xi^3)+3\xi^4-12\xi^4+6\xi^3\right\}u\cdot e\sin f=$$

$$=\frac{\mu}{e^2p^3}\left\{(6+2-8)\xi^5+(-10-9e^2-2+8+4e^2+4+3e^2+2e^2)\xi^4\right\}+$$

$$\frac{\mu}{e^2p^3}\left\{(4+8e^2-4-2e^2-6e^2)\xi^3+(-3e^2\eta^2+3e^2\eta^2)\xi^2\right\}+\frac{\mu}{\eta p^3}\times 0\times u\cdot e\sin f=0$$

以上から Schwarzschild の一体問題の運動方程式の中の動径部分が Newton 力学に於ける二体問題の運動方程式の中の動径の部分に対応して居るのが明らかとなった。

続いて経度に付いて見てみる。

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\Phi}{dt}\right)-2m\frac{dR}{dt}\frac{d\Phi}{dt}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left\{(r^2+2mr\rho)\left(\frac{d\phi}{dt}+m\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\}-2m\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\phi}{dt}\right)+m\left\{\frac{d}{dt}\left(2r\rho\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d\sigma}{dt}\right)-2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right\}=0$$

ここで係数に m を有する項を抽出する。

$$\frac{d}{dt}\left(2r\rho\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d\sigma}{dt}\right)-2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}$$

計算に取り掛かる前に $2r\rho\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d\sigma}{dt}$ を計算して置く。

$$2\frac{p}{\xi}\left\{\frac{2}{e^2}(1-\xi)-\frac{3u}{\eta}e\sin f\right\}\frac{n\xi^2}{\eta^3}+\frac{p^2}{\xi^2}\left\{\frac{n}{e^2\eta^3p}\left(4\xi^4-(4+2e^2)\xi^3\right)+\frac{6n}{\eta^4p}\xi^3u\cdot e\sin f\right\}=$$

$$=\frac{na}{e^2\eta}(-4\xi^2+4\xi)-\frac{6na}{\eta^2}\xi u\cdot e\sin f+\frac{na}{e^2\eta}\left\{4\xi^2-(4+2e^2)\xi\right\}+\frac{6na}{\eta^2}\xi u\cdot e\sin f=$$

$$=-\frac{2na}{\eta}\xi+0\times e\sin f=-\frac{2na}{\eta}\xi$$

準備が整ったので求める量の計算に移る事にする。

$$\frac{d}{dt}\left(2r\rho\frac{d\phi}{dt}+r^2\frac{d\sigma}{dt}\right)-2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-2\frac{na}{\eta}\xi\right)-2\frac{na}{\eta}e\sin f\frac{n\xi^2}{\eta^3}=$$
$$=-2\frac{na}{\eta}\times\left(-\frac{n\xi^2}{\eta^3}e\sin f\right)-2\frac{na}{\eta}e\sin f\frac{n\xi^2}{\eta^3}=$$
$$=+2\frac{n^2a\xi^2}{\eta^4}e\sin f-2\frac{n^2a\xi^2}{\eta^4}e\sin f=2\frac{\mu}{r^2}e\sin f-2\frac{\mu}{r^2}e\sin f=0$$

これに依って $\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\phi}{dt}\right)=0$ の成立するのが知れた。Schwarzschild の一体問題の運動方程式に於ける経度の部分が Newton 力学の二体問題の運動方程式に於ける経度の部分に対応して居るのが知れる。

……………………

斯(か)くして Schwarzschild の一体問題の運動方程式の座標 (R,Φ) に $R=r+m\rho$ 及び $\Phi=\phi+m\sigma$ を考慮すると Newton 力学に於ける二体問題の運動方程式の動径部分：$\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2+\dfrac{\mu}{r^2}=0$ 及び経度部分：$\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\phi}{dt}\right)=0$ の導かれるのが明らかとなった。

世に言う**一般相対性理論**の真相

量 R が太陽と水星間の距離を表わして居るのであるから近日点に於ては $\dfrac{dR}{dt}=0$ が満たされて居なければならない。詰まり次の関係式が成立する訳である：

$$\frac{dR}{dt}=\frac{dr}{dt}+m\frac{d\rho}{dt}=\frac{na}{\eta}e\sin f+m\left\{\frac{2}{e^2}\frac{n\xi^2}{\eta^3}e\sin f-\frac{3}{\eta}\frac{n\xi}{\eta^2}e\sin f-\frac{3u}{\eta}\frac{n\xi^2}{\eta^3}e\cos f\right\}=0$$

Newton 力学の二体問題では $f=0$ から出発すると一公転の後には $f=2\pi$となる。この時に経度は $\phi=\varpi$ が $\phi=\varpi+2\pi$ に移行。これが Schwarzschild の系 (R,Φ) に於ては $f=0$ の時に $\dfrac{dR}{dt}=0$ が成立して居たとしても一公転の後には $\dfrac{dR}{dt}=0$ が成立するのは $f=2\pi+\delta_f$ になった時と考えられる。u は $u=2\pi+\delta_u$ ここで δ_f も δ_u も m の大きさの微小量と考えられる。

$$\frac{na}{\eta}e\delta_f+m\left\{\frac{2n}{e^2\eta^3}(1+e)^2e\delta_f-\frac{3n}{\eta^3}(1+e)e\delta_f-\frac{3n}{\eta^4}(2\pi+\delta_u)(1+e)^2e\times 1\right\}=0\quad\Rightarrow$$
$$\delta_f=\frac{\eta}{nae}\times m\frac{3n}{\eta^4}\times 2\pi(1+e)^2e=m\times\frac{6\pi}{a\eta^3}(1+e)^2=\frac{6\pi m}{p}\times\frac{(1+e)^2}{\eta}$$

これに呼応して経度 $\Phi=\phi+m\sigma=\phi+\dfrac{m}{p}\left\{3\left(f-\dfrac{u}{\eta}\xi^2\right)+\dfrac{2+2\xi+e^2}{e^2}e\sin f\right\}$ は如何なる振舞いを演ずるのか？ $f=0$ 及び $u=0$ では勿論 $\Phi=\phi=\varpi$ である。$f=2\pi+\delta_f$ では

$$\Phi=\varpi+2\pi+\delta_f+\frac{m}{p}\left\{3(2\pi+\delta_f)-\frac{3(2\pi+\delta_u)}{\eta}(1+e)^2+\frac{2+2(1+e)+e^2}{e^2}e\delta_f\right\}=$$
$$=\varpi+2\pi+\frac{6\pi m}{p}\times\frac{(1+e)^2}{\eta}+\frac{m}{p}\left\{(6\pi-\frac{6\pi}{\eta}(1+e)^2\right\}=\varpi+2\pi+\frac{6\pi m}{p}$$

この事から Newton 力学では完全に元に復帰して居るのに Schwarzschild の系では件(くだん)の $\dfrac{6\pi m}{p}$ なる量が余剰に付加される事になって居る。Newton 力学では存在しては居ないものが Schwarzschild の系では存在する事になって居るのである。解く必要のないものなのに解いたと主張する天下の大間違いの根源が此処に存して居るのである。

然しこれを以て一般相対性理論が世紀の大問題を解いたとして喧伝されて来て居るのは周知の事実である。『由々しき事態』と言うの外は無い。

以上を整理すれば次の様になる：

☆　相対性理論と言って居るが (R,Φ) で描く時間空間に相対性は存在しては居ない

☆　Schwarzschild の系 (R,Φ) で捉える運動学は Riemann 幾何学で表現したもの

本小論の作成に際しては山本一登さんのお力添えに縋(すが)り通しであった。
記して心からの謝意を表(ひょう)したい。

参考文献

1）鈴木敬信　**天文学辞典**　地人書館
昭和 61 年 (1986 年) p.328

2）Brumberg, V.A.
Essential Relativistic Celestial Mechanics
Adam Hilger　1991 p.85

3）井上 猛
水星近日点前進問題の解決
第 25 回天体力学研究会集録
1992 年　pp.205-210

4）井上 猛
「Schwarzschild 解」の意味するもの
第 34 回天体力学研究会集録
2002 年　pp.226-235

誤り訂正

◎　**天界** 2021 年 11 月号 p.329

下から 8 行目
〔誤〕§633 チェムバーレン・モウルトンの
〔正〕§633 チェムバーリン・モウルトンの

下から 4 行目
〔誤〕§636 フォン・ワ”イツゼッケルの
〔正〕§636 フォン・ワ”イツェッケルの