太陽系の角運動量

井上 猛　T. Inoue
（滋賀県 湖南市）

関連事項に付いての解説を引用する [1)]。

太陽系の起源

前半省略 (6) 太陽系内の角運動量の分布は全く異常である．惑星の総質量は太陽系の総質量の 0.134 %にすぎないのに, 太陽系が持つ角運動量の 98 %は惑星が持ち (公転運動に結びついて), 太陽が持つ角運動量はわずか 2 %である (自転運動に結びついて)．後半省略

星雲説([1)]p.338)

前半省略 この星雲説は昔から有名で, 今でも口にする人を見かけるほどであるが, いくつかの欠点を持つ．最大の欠点は, 太陽系内における角運動量分布の異常を説明できないことである．現在の惑星が持つ大量の角運動量を原星雲が持っていたら, 星雲が収縮できないことが証明できる．また星雲が説どおりならば, 太陽も大量の角運動量を持ち, その赤道面は惑星の公転軌道面と一致するはずであるが, これも事実と反する．後半省略

同様の解説は別の文献でも参照する事が出来る [2)]。

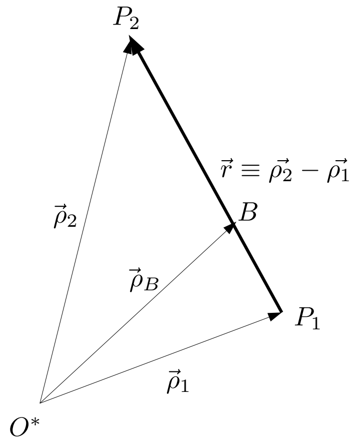
- § 633 チェムバーレン・モウルトンの微惑星説
- § 634 ジーンズ・ジェフリズの潮汐説
- § 635 連星起源説
- § 636 フォン・ワ ”イツゼッケルの乱流渦動説

…………………

著名な研究者の上記の様な諸説に対して異を唱える人は居ないので在ろうか？

力学の基礎

絶対空間 $O^*-\ \xi\eta\zeta$ 系内に二個の天体 $P_1\,P_2$ を考える。夫々(それぞれ)の位置ヴェクトルを $\vec{\rho_1}\ \vec{\rho_2}$ とし夫々(それぞれ)の質量を m_1 及び m_2 とする。



P_2 及び P_1 に対する運動方程式 ：

$$m_2 \frac{d^2\vec{\rho_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m_1 \frac{d^2\vec{\rho_1}}{dt^2} = -\frac{Gm_2m_1}{r^2}\frac{(\overrightarrow{-r})}{r}$$

$$r \equiv |\vec{r}|$$

これから次の結果は明らかである：

$$m_2 \frac{d^2\vec{\rho_2}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2\vec{\rho_1}}{dt^2} =$$

$$= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - \frac{Gm_2m_1}{r^2}\ \frac{(\overrightarrow{-r})}{r} = \vec{0}$$

二体の重心はこれらを結ぶ線上に在る。これを B として位置ヴェクトルを $\vec{\rho_B}$ とすれば次の関係を満たす：

$$(m_2+m_1)\vec{\rho_B} = m_2\vec{\rho_2} + m_1\vec{\rho_1}$$

これを時間で二度微分する。

$$(m_2+m_1)\frac{d^2\vec{\rho_B}}{dt^2} = $$
$$= m_2\frac{d^2\vec{\rho_2}}{dt^2} + m_1\frac{d^2\vec{\rho_1}}{dt^2}$$

前ページの結果を適用すれば次の関係を得るのは容易な事である：

$$(m_2+m_1)\frac{d^2\vec{\rho_B}}{dt^2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\vec{\rho_B}}{dt^2} = \vec{0}$$

これを区間 $[0,t]$ で積分して次を得る：

$$\vec{\rho_B} = \vec{v_0}t + \vec{\rho_0}$$

ここに $\vec{v_0}$ 及び $\vec{\rho_0}$ は定数である。これから二体の系の重心が絶対空間の中で等速度の直線運動をして居るのが知れた。当該重心に原点 O を有する直交座標系 $O-xyz$ を考える。そうして次で定義される重心座標 $\vec{r_2}$ 及び $\vec{r_1}$ を導入する：

$$\vec{r_2} \equiv \vec{\rho_2} - \vec{\rho_B} \quad ; \quad \vec{r_1} \equiv \vec{\rho_1} - \vec{\rho_B}$$
$$\vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{\rho_2} - \vec{\rho_1} = \vec{r}$$

これを用いて先の運動方程式を書く。

$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{(+\vec{r})}{r} = m_2\frac{d^2\vec{\rho_2}}{dt^2} =$$
$$= m_2\frac{d^2\vec{\rho_B}}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} =$$
$$= \quad \vec{0} \quad + m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}$$

……………………………

$$-\frac{Gm_2m_1}{r^2}\frac{(-\vec{r})}{r} = m_1\frac{d^2\vec{\rho_1}}{dt^2} =$$
$$= m_1\frac{d^2\vec{\rho_B}}{dt^2} + m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} =$$
$$= \quad \vec{0} \quad + m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2}$$

絶対空間なるものから出発したが二体の系の重心を原点とする物理空間に依拠しての議論が出来る事になった。

角運動量の計算

重心座標系に於ける二体の角運動量 $\vec{L}$ は次式で与えられる：

$$\vec{L} = \vec{r_2} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} + \vec{r_1} \times m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt}$$

この $\vec{L}$ が保存量であるのは次の計算で明らかになる：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r_2}}{dt} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} + \vec{r_2} \times m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} +$$
$$+ \frac{d\vec{r_1}}{dt} \times m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt} + \vec{r_1} \times m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} =$$
$$= \quad \vec{0} \quad + \vec{r_2} \times m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} +$$
$$+ \quad \vec{0} \quad + \vec{r_1} \times m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} =$$
$$= \vec{r_2} \times \left\{-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{(+\vec{r})}{r}\right\} +$$
$$+ \vec{r_1} \times \left\{-\frac{Gm_2m_1}{r^2}\frac{(-\vec{r})}{r}\right\} =$$
$$= (\vec{r_2} - \vec{r_1}) \times \left\{-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right\} =$$
$$= \quad \vec{r} \quad \times \left\{-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right\} = \vec{0}$$

以下に述べる関係は極めて重要：

$$m_2\vec{r_2} + m_1\vec{r_1} =$$
$$= m_2\vec{\rho_2} + m_1\vec{\rho_1} - (m_2+m_1)\vec{\rho_B}$$
$$\Downarrow$$
$$m_2\vec{r_2} + m_1\vec{r_1} = \vec{0}$$

従って次も明らかである：

$$m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} + m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt} = \vec{0}$$

上記の二つの関係に着目するなら核心に迫る事の出来る計算が可能となる。これを次の形に書いて置く：

$$m_1\vec{r_1} = -m_2\vec{r_2} \ ; \ m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt} = -m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt}$$

重心座標系に於ける二体の角運動量 $\vec{L}$ の各項に天体 P_1 の質量 m_1 を乗ずる：

$$m_1\vec{L} = m_1\vec{r_2} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} + m_1\vec{r_1} \times m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt}$$

右辺の第二項に前ページの関係を代入：

$$m_1\vec{L} = m_1\vec{r_2} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} +$$
$$+ \left\{-m_2\vec{r_2}\right\} \times \left\{-m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt}\right\} =$$
$$= (m_2 + m_1)\vec{r_2} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt}$$

これは天体 P_2 の角運動量が次の様になるのを教えて呉れて居る：

$$\boxed{\vec{r_2} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} = \frac{m_1}{m_2 + m_1}\vec{L}}$$

同様の計算は天体 P_1 の角運動量が次式で与えられるのを教えて呉れる：

$$\boxed{\vec{r_1} \times m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt} = \frac{m_2}{m_2 + m_1}\vec{L}}$$

角運動量なるものが天体の質量に比例すると云う事を上記の表式は表わして居る。

. . . .

天体 P_1 を太陽とし天体 P_2 を木星としてみよう。そうすれば太陽の質量は木星の質量の約一千倍であるから木星の角運動量は太陽の角運動量の約一千倍と云う事になる。

従って現在の太陽系に於ける角運動量の分布には問題としなければならないものは何一つ存在しては居ないと云う事になる。

現実の太陽系には木星の他に土星を初め天王星その他の惑星も存在して居る。

そこで上の議論の一般化を試みて置こう。天体が P_1P_2 の他に P_3 以下 P_N まで存在して居るとしよう。その場合にも先に得た二つの関係に類似のものが存在する：

☆ $\quad m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \sum_{j=3}^{N} m_j\vec{r_j} = \vec{0}$

☆ $m_1\dfrac{d\vec{r_1}}{dt} + m_2\dfrac{d\vec{r_2}}{dt} + \displaystyle\sum_{k=3}^{N} m_k\frac{d\vec{r_k}}{dt} = \vec{0}$

ここでも角運動量を $\vec{L}$ と表記する。

$$\vec{L} = \vec{r_1} \times m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt} + \vec{r_2} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} +$$
$$+ \textstyle\sum_{k=3}^{N} \vec{r_k} \times m_k\dfrac{d\vec{r_k}}{dt}$$

先と同様の計算を行なえば次が得られる。

$$(m_1 + m_2)\vec{r_2} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} = m_1\vec{L} +$$
$$-m_2\vec{r_2} \times \left\{\textstyle\sum_{k=3}^{N} m_k\dfrac{d\vec{r_k}}{dt}\right\} +$$
$$-\left\{\textstyle\sum_{j=3}^{N} m_j\vec{r_j}\right\} \times m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt} +$$
$$-\left\{\textstyle\sum_{j=3}^{N} m_j\vec{r_j}\right\} \times \left\{\textstyle\sum_{k=3}^{N} m_k\dfrac{d\vec{r_k}}{dt}\right\}$$

只今の場合は天体 P_2 の角運動量が残りの天体の諸量に依って複雑な形で表わされる事になって居る。然し本質に於ては二つの天体のみで考えた先の結果を崩すものでは無いのが知れるであろう。

これが太陽系の角運動量の本質なのである。

参考文献

1） 鈴木敬信 **天文学辞典** 地人書館
昭和 61 年 (1986 年) p.397

2） 荒木俊馬 荒木雄豪 共著
現代天文学事典 恒星社厚生閣
昭和 31 年 (1956 年) p.404